المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum Development

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الحادي عشر- الفرع الأدبي - دليل المُعلِّم

الفصل الدراسي الأول

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي　　يوسف سليمان جرادات　　أ.د. محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237　06-5376266　P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor　feedback@nccd.gov.jo　www.nccd.gov.jo

قـررت وزارة التربيـة والتعليـم اسـتخدام هـذا الدليـل في مـدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاء على قـرار المجلس الأعـلى للمركز الوطنـي لتطوير المناهـج في جلسـته رقـم (2023/4)، تاريـخ 2023/7/11 م، وقـرار مجلـس التربيـة والتعليـم رقـم (2023/247) تاريـخ 2023/8/9 بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2023 / 2024 م.

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 414 - 9

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/811)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

دليـل المعلـم: الصف الحادي عشـر: الفـرع الأدبي: الفصـل الدراسـي الأول/ المركز الوطنـي لتطوير المناهـج.– عمان: المركز، 2023

(131) ص.

ر.إ.: 2023/2/811

الواصفات: / الرياضيات / / الأدلة/ / المعلمون/ / أساليب التدريس/ / التعليم الثانوي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

المحكم التربوي: د. خـالـد محـمـد أبو اللـوم

المصمم الجرافيكي: راكان محمد السعدي

الطبعة الأولى (التجريبية)

1444 هـ / 2023 م

المقدمة

يسرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أنْ يُقدِّم للمُعلِّمين والمُعلِّمات هذه الطبعة من دليل المُعلِّم للصف الحادي عشر للفرع الأدبي، آملًا أنْ تكون لهم مُرشِدًا وداعمًا في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعلِّم على جميع المصادر التي تَلزم المُعلِّم/ المُعلِّمة، بَدْءًا بالنسخ المُصغَّرة من كتابي الطالب والتمارين، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومسائل؛ ما يُغْني عن حمل هذين الكتابين إلى الغرفة الصفية. وكذلك يحتوي الدليل على جميع أوراق المصادر المشار إليها في الدروس، ويُمكِن للمُعلِّم/ للمُعلِّمة تصوير نسخ منها للطلبة؛ ما يُوفِّر عليهما جُهْد إعداد هذه الأوراق. استُهِلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان «أهلًا بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة»، وتعرض العناصر الرئيسة في كلٍّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعلِّم، وتُبيِّن النهج المُعتمَد في كلٍّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعلِّم/ المُعلِّمة قراءة هذه الصفحات بِتَرَوٍّ وتدبُّرٍ قبل البَدْء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بَدْءًا بمرحلة التمهيد، ومرورًا بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشادات تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التخطيط الزمني للمهام في كل مرحلة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويم التي يتضمَّنها المنهاج المُطوَّر، فضلًا عن الأخطاء المفاهيمة الشائعة والإرشادات للمعلمين/ للمعلمات حول كيفية معالجتها.

يُقدِّم الدليل أيضًا مقترحات لتنويع التعليم تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجامًا مع الاتجاهات الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدَّم الدليل نتاجات التعلُّم السابق ونتاجات التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلًا عن أدوات تشخيص ومعالجة مناسبة، تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّم الحالي. يضاف إلى ذلك أنَّ تعرُّف المُعلِّم/ المُعلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي سوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر له/ لها تصوُّرًا كافيًا عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دِقَّةً.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الدليل، فإنّا نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب زملائنا وزميلاتنا من المُعلِّمين والمُعلِّمات ويكون خير معين لهم/ لهنّ، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

أهلًا بك في مناهج الرياضيات المطورة .... a–h

الوحدة 1 البرمجة الخطية 6A

مُخطَّط الوحدة 6B

نظرة عامة على الوحدة 6

الدرس 1 حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا 8

الدرس 2 حَلُّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا 15

معمل برمجية جيوجبرا: تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا 23

الدرس 3 البرمجة الخطية 25

اختبار نهاية الوحدة 32

كتاب التمارين 33A

ملحق الإجابات 33D

الوحدة 2 مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق 34A

مُخطَّط الوحدة 34B

نظرة عامة على الوحدة 34

الدرس 1 مبدأ العَدِّ الأساسي 36

الدرس 2 مضروب العدد 42

الدرس 3 التباديل 46

الدرس 4 التوافيق 52

اختبار نهاية الوحدة 57

كتاب التمارين 57A

ملحق الإجابات 57D

قائمة المحتويات

الوحدة 3 الاحتمالات 58A

مُخطَّط الوحدة 58B

نظرة عامة على الوحدة 58

الدرس 1 الاحتمال بالتباديل والتوافيق 60

الدرس 2 المتغيرات العشوائية 67

الدرس 3 احتمال المتغير العشوائي 71

الدرس 4 توقُّع المتغير العشوائي 78

اختبار نهاية الوحدة 84

كتاب التمارين 85A

ملحق الإجابات 85D

أهلًا بك

في مناهج الرياضيات المُطوَّرة

عزيـزي المُعلِّـم/ عزيزتـي المُعلِّمة، يسـرُّنا في هـذه المُقدِّمة أنْ نُبيِّن الأسـس العلميـة والتربوية التـي قامـت عليهـا مناهـج الرياضيات المُطـوَّرة بطريقة مُبسَّـطة، وذلـك بعرض بعـض العناصر مـن كتـاب الطالـب، وكتاب التماريـن، ودليل المُعلِّـم، التي تتجلّـى فيها تلك الجوانـب العلمية والتربويـة بوضـوح. ونحـن إذ نعـرض هـذه المُقدِّمـة فإنّا نأمـل أنْ تكـون مُعينةً على فهـم كيفية اسـتعمال المناهـج المُطـوَّرة، وتوظيفهـا بصـورة صحيحـة داخـل غرفـة الصـف، بمـا يُحقِّـق الفائـدة المنشـودة منها.

تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.
2. أنواع التقويم وأدواته.
3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.
4. التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.
5. مهارات التفكير العليا.
6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

وفي نهاية هذه المقدمة بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعًا، ومُعينةً عند التخطيط لتقديم الدروس.

1 خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

يُقدِّم هذا الدليل خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمَّن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد على تقديم الدرس بنجاح.

1 التهيئة

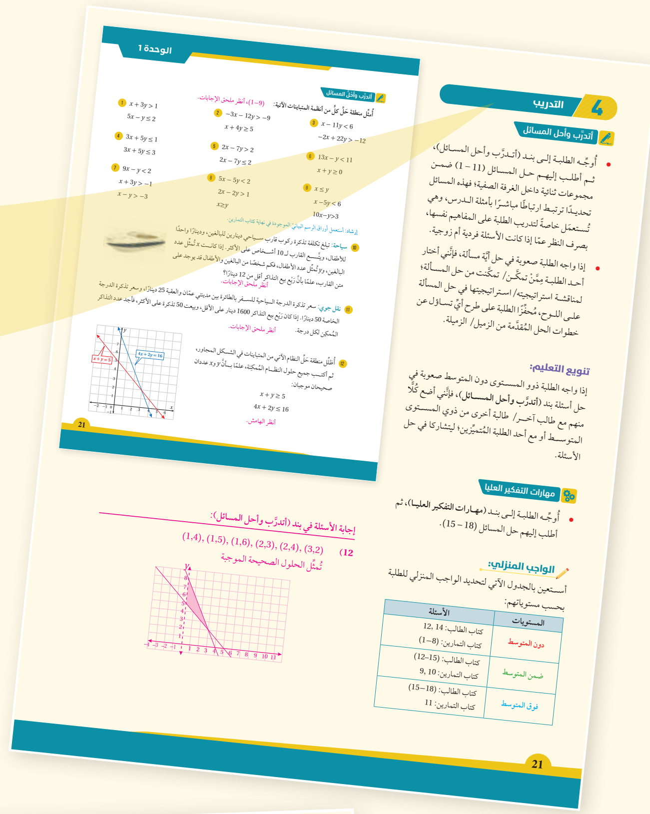
تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد في هذا الدليل مقترحات تعين على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطًا مبنيًّا على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا يمكن في أثناء هذه المرحلة رصد بعض الأخطاء المفاهيمية وتصحيحها قبل بدء الدرس.

2 الاستكشاف

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعيَّن عليك في هذه المرحلة أداء دور تيسير التعلّم، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتًا كافيًا لدراستها والتفكير فيها، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة المقترحة في بند (الاستكشاف) من هذا الدليل. ليس شرطًا أنْ يتمكَّن الطلبة من الإجابة عن هذه الأسئلة بصورة صحيحة؛ لذا عليك تقبّل الإجابات، ثم النظر فيها لاحقًا بعد انتهاء الدرس، والتأكد من صحتها، علمًا بأنَّ تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في بند (مسألة اليوم)؛ لحلها في نهاية الدرس.

3 التدريس

من المُتوقَّع أنْ تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلُّم) في إعادة التوازن لديهم، للتمكن من تكوين خبرات مشتركة مُحدَّدة تساعد على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيرًا من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا يتعيَّن الاستعانة بالإرشادات الواردة في بند (التدريس) من هذا الدليل؛ للتمكّن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.



4 التدريب

فــي هذه المرحلــة يتدرَّب الطلبـــة على أنواع مختلفة من المسائل المجرَّدة والحياتية في بند (أتدرَّب وأحُلُّ المسائل) وبند (مهارات التفكير العليا) داخل غرفة الصف؛ لترسـيخ المفاهيم الجديدة، وزيـــادة الطاقة الإجرائية لديهم. قد يُكمِل الطلبة هذه المرحلة في المنزل. وكذلك التدريبـــات والمســـائل الواردة فـــي الصفحة المقابلة للدرس في كتاب التمارين.

5 الإثراء

تُعَدُّ توســعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأســاس لهذه المرحلة، ويتمثَّل ذلك في إشــراك الطلبــة في مهام تتضمَّــن مفاهيم وعمليات أوســع وأكثــر عمقًــا. تُوفِّر مناهج الرياضيات المُطوَّرة مصادر عِدَّة لإثراء الطلبة ذوي المستوى فوق المُتوسِّط، منها بند الإثراء في هذا الدليل، الذي يحوي مســألةً، أو نشاطًا صفيًّا، أو نشاطًا حاســوبيًّا، إضافةً إلى مشروع الوحدة الــذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

6 الختام

هـي المرحلـة الأخيرة مـن مراحل تقديـم الدرس، وتهـدف إلى تجميع الأفـكار المختلفـة التـي تضمَّنها الدرس، ثـم عرضها بصـورة مترابطة، فضـلًا عن اشـتمالها على مقترحات تسـاعد علـى تقديم هـذه المرحلة بنجاح.

2 أنواع التقويم وأدواته:

التقويم جزء لا يتجزَّأ من عملية التعلُّم؛ فهو يُواكِب جميع خطواتها، ويضمن اســتمرارها وصولًا إلى تحقيق الهدف. يُعرَّف التقويم بأنَّه عملية تُستعمَل فيها معلومات من مصادر مُتعدِّدة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراســي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوَّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم القبلي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي.**

أ التقويم القبلي:


الوحدة 1: البرمجة الخطية

أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

كتابة متباينة خطية بمتغير واحد تمثل جملة معطاة (الدرس 1)

أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

مثال: أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

حلّ المتباينات الخطية بمتغير واحد (الدرس 1)

أحلّ المتباينتين الخطيتين الآتيتين:

$9x - 8 > 2(3x + 8)$

$2x + 3 \leq 7x - 2$

مثال: أحلّ المتباينة الخطية: $8x - 5 \leq 4x + 7$

$8x - 5 \leq 4x + 7$

$4x - 5 \leq 7$

$4x \leq 12$

$x \leq 3$

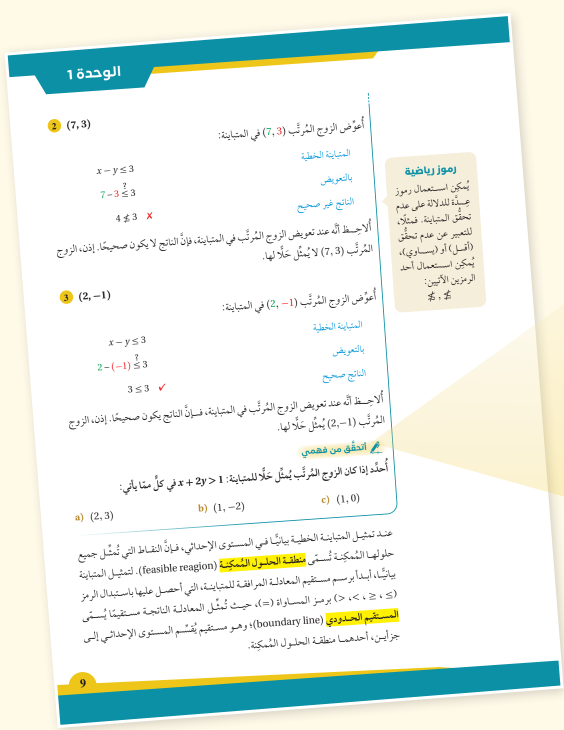
$(-\infty, 3]$

6

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفةَ السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد على تحديد ما يَلزم الطلبة من معالجات تتمثَّل في مصادر التعلُّــم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أداة تقويم قبلي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

ب التقويم التكويني:

يحـدث هـذا النـوع مـن التقويـم فـي أثنـاء عمليـة التدريـس، ويهـدف إلـى متابعـة تعلُّـم الطلبـة أوَّلًا بـأوَّل، والتأكُّـد أنَّ العمليـة التعليميـة التعلُّمية تسـير فـي اتجـاه تحقيـق أهدافهـا المنشـودة، وأنَّـه لا يوجـد انحـراف عـن مسـارها؛ مـا يسـاعد علـى اتخـاذ القـرارات الصحيحـة، مثـل: الاسـتمرار فـي عمليـة التدريـس، أو التعديـل عليهـا، أو النظر فيهـا مـن جديـد. مـن أدوات التقويـم التكوينـي: الأسـئلة الشـفوية، والملاحظـات غيـر الرسـمية، والاختبارات القصيرة.


الوحدة 1

$(7, 3)$

$x - y \leq 3$

$7 - 3 \leq 3$

$4 \leq 3$

رموز رياضية

$(2, -1)$

$x - y \leq 3$

$2 - (-1) \leq 3$

$3 \leq 3$

أتحقق من فهمي

أحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حلًّا للمتباينة: $x + 2y > 1$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(2, 3)$ b) $(1, -2)$ c) $(1, 0)$

9

تحتــوي مناهج الرياضيات المُطوَّرة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثَّل في مسائل بند **(أتحقَّق من فهمي)** التي تلي كل مثال.

أتحقَّق من فهمي

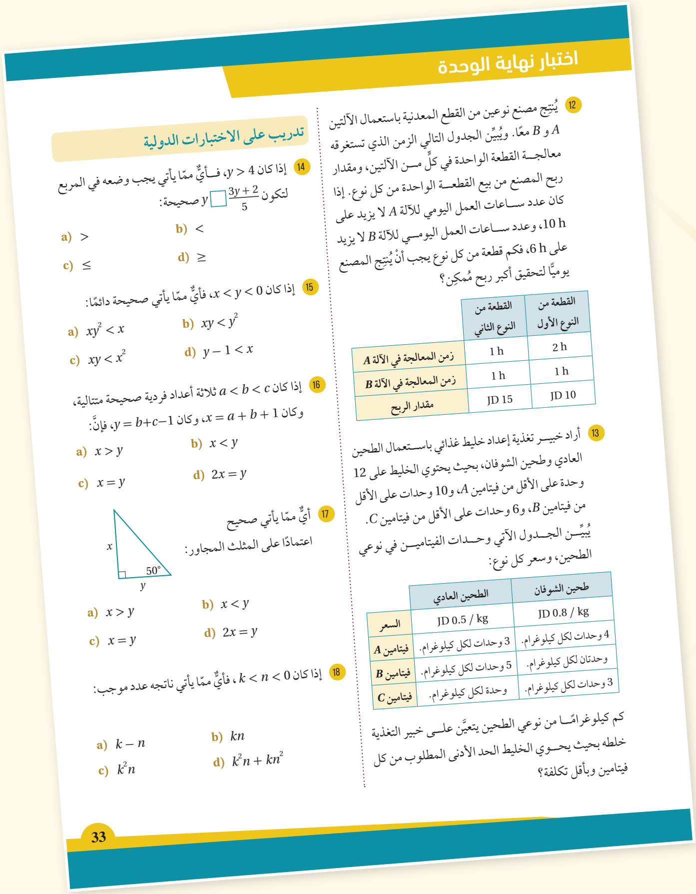
أُحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x + 2y > 1$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(2, 3)$ b) $(1, -2)$ c) $(1, 0)$

ج التقويم الختامي:

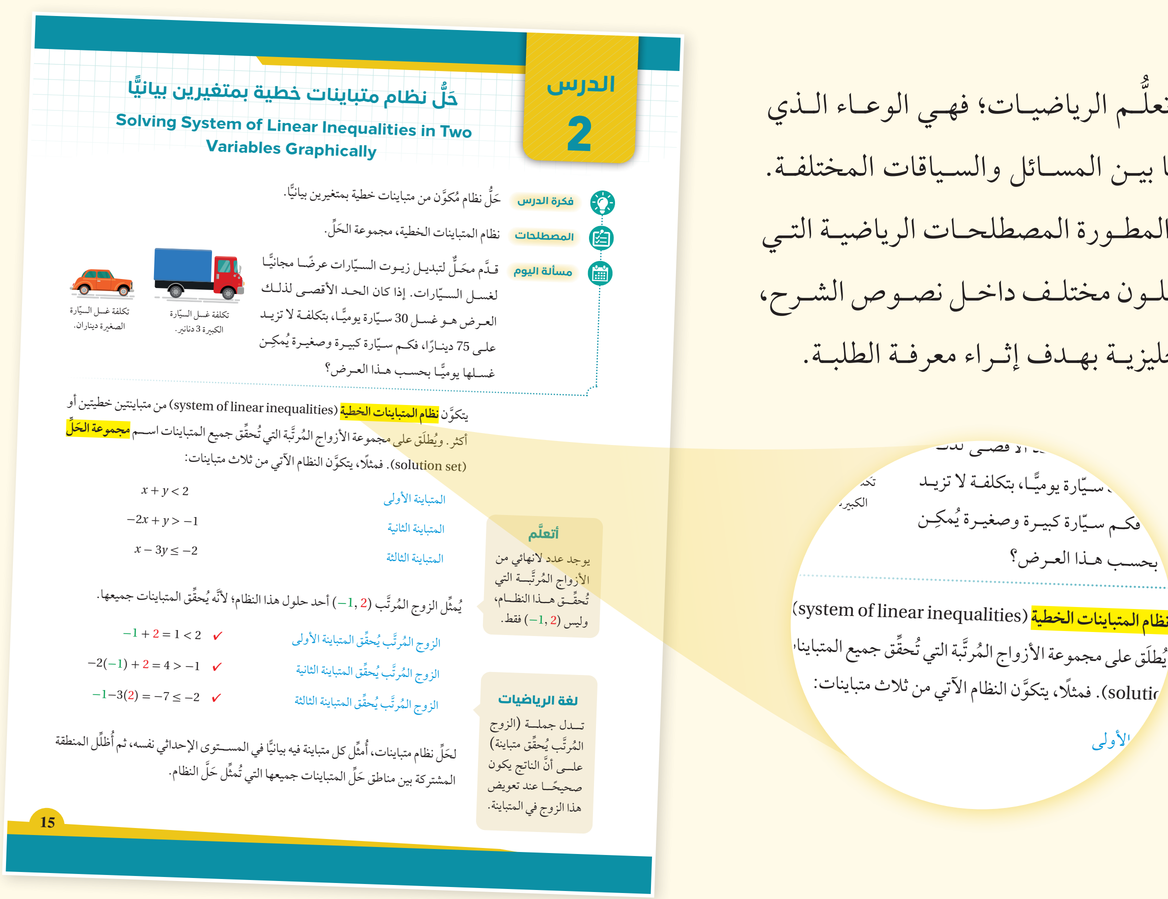
يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد على تحديد مدى إتقان الطلبة للمفاهيم والمهارات التي تم تقديمها لهم.

تُوفِّر المناهج المُطوَّرة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثَّل في فقرة (اختبار نهاية الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوِّعة تشمل نتاجات الوحدة كلها.

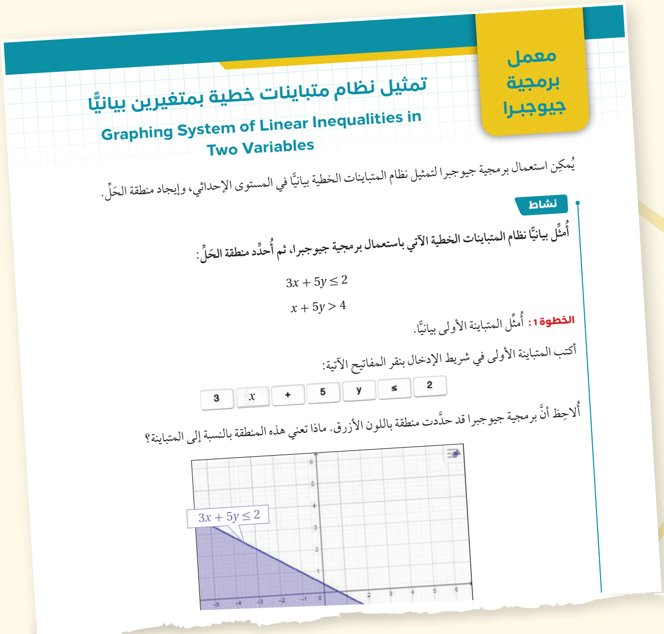


3 تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها:

تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلُّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المطورة المصطلحات الرياضية التي يتعرَّفها الطلبة أول مرَّة، وميَّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتها من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.



4 التعلُّم باستعمال التكنولوجيا:


معمل برمجية جيوجبرا

تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Graphing System of Linear Inequalities in Two Variables

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحَلِّ.

نشاط

أُمثِّل بيانيًّا نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

$$3x + 5y \leq 2$$
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: أُمثِّل المتباينة الأولى بيانيًّا.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

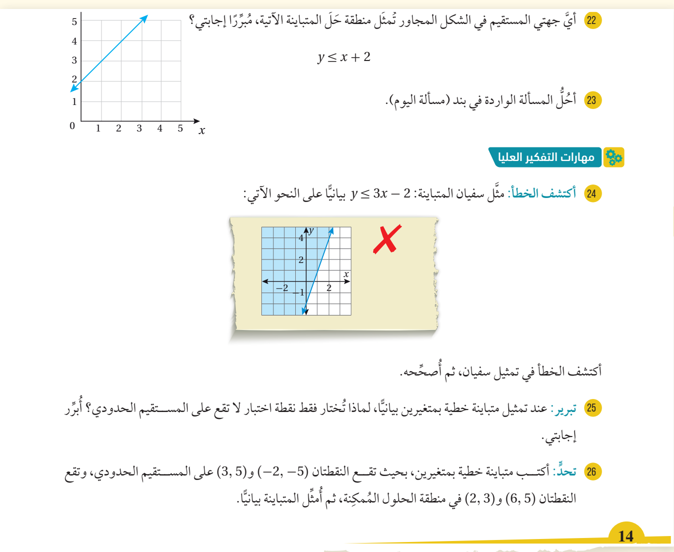
3 x + 5 y ≤ 2

أُلاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟

تُســهِم التكنولوجيا إســهامًا فاعلًا في تعلُّم الرياضيات؛ فهي تُوفِّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلُّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنَّ توافر الأدوات التكنولوجية يســاعد الطلبة على التأمُّــل والتحليل والتفكير بــدلًا من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنـح أدلـة المُعلِّـم في مناهـج الرياضيـات المُطـوَّرة فرصـة توظيف عدد مـن البرمجيـات التعليمية فـي تدريـس الطلبة؛ سـواء أكان ذلك في المدرسـة، أم فـي المنزل.

5 مهارات التفكير العليا:


22 أيَّ جهتي المستقيم في الشكل المجاور تُمثِّل منطقة حَلِّ المتباينة الآتية، مُبرِّرًا إجابتي؟

$$y \leq x + 2$$

23 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

24 أكتشف الخطأ: مثَّل سفيان المتباينة: $y \leq 3x - 2$ بيانيًّا على النحو الآتي:

أكتشف الخطأ في تمثيل سفيان، ثم أُصحِّحه.

25 تبرير: عند تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا، لماذا تُختار فقط نقطة اختبار لا تقع على المستقيم الحدودي؟ أُبرِّر إجابتي.

26 تحدٍّ: أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تقع النقطتان $(-5, -2)$ و$(3, 5)$ على المستقيم الحدودي، وتقع النقطتان $(6, 5)$ و$(2, 3)$ في منطقة الحلول المُمكِنة، ثم أُمثِّل المتباينة بيانيًّا.

14

تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمُّل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنح مناهج الرياضيــات المُطوَّرة الطلبة فرصة لتطويــر مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مســائل مرتبطــة بنتاجات الدرس؛ إذ يحــوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المســائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلَّب حلُّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلِّ جميعها.

تحدٍّ: تتضمَّن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثِّل تحدِّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًّا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتِّم عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيُّها مختلف: يتعيَّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلَب إليهم كتابة هذه المسألة.

6 الوصول إلى الطلبة كافةً:

تراعي مناهج الرياضيات المُطوَّرة تكافُؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل منهم (التمايز)، وتساعد على تجاوز العثرات، وتعزيز مناحي التفوّق.

يُمكِن تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسة، هي:

المحتوى: يُقصَد بذلك ما يحتاج كل من الطلبة إلى تعلُّمه، وكيفية الحصول على المعلومة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى: تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

إرشادات:

- يُفضَّل استعمال الأقلام المُلوَّنة أثناء شرح المثال 1، في خطوة تعويض إحداثيي الزوج المُرتَّب؛ لِما لذلك من أثر في تحفيز الطلبة على تخيُّل عملية التعويض، وبخاصة أولئك الذين يتمتَّعون بذكاء بصري.

الأنشطة: كل ما يشارك فيه كل من الطلبة من أنشطة؛ للتمكُّن من فهم المحتوى، أو إتقان المهارة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر: استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ويكون تقدُّمهم فيها مُتباينًا من حيث المستوى، ومنح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتًا إضافيًّا لإنجاز المهام.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $\geq$ أو الرمز $\leq$، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي متصلًا كما في الشكل الآتي:

وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $<$ أو الرمز $>$، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي مُتقطِّعًا كما في الشكل الآتي:

لتحديد أيِّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول المُمكِنة، أختار أيَّ نقطة (a, b) لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أُعوِّضها في المتباينة الخطية، فإذا كانت تُحقِّقها (أيْ ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أُظلِّل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلّا أُظلِّل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 2

أُمثِّل المتباينة الخطية: $2x + 3y < 6$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أُمثِّل المستقيم الحدودي.

أُمثِّل المستقيم الحدودي: $2x + 3y = 6$ بيانيًّا، ثم أُنشِئ جدول قِيَم لإيجاد نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين:

x	0	3
y	2	0

أتذكَّر

لتمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y = 0$ في المعادلة، ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x = 0$ في المعادلة، ثم أصل بين نقطتي التقاطع بمستقيم كما في الشكل الآتي:

10

إرشادات:

- يُفضَّل استعمال الأقلام المُلوَّنة أثناء شرح المثال 1، في خطوة تعويض إحداثيي الزوج المُرتَّب؛ لِما لذلك من أثر في تحفيز الطلبة على تخيُّل عملية التعويض، وبخاصة أولئك الذين يتمتَّعون بذكاء بصري.
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة في تحديد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حلًّا للمتباينة أم لا، وذلك بتعويض الإحداثي x للزوج المُرتَّب مكان المُتغيِّر y في المتباينة، وتعويض الإحداثي y للزوج المُرتَّب مكان المُتغيِّر x في المعادلة؛ لذا أطلب إلى الطلبة كتابة كل مُتغيِّر فوق الإحداثي المناسب له في الزوج المُرتَّب.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

10

المُنتَجات: مشاريع يتعيَّن على الطلبة تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّموه في الوحدة، وتوظيفه في حياتهم، والتوسُّع فيه. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المُنتَجات: السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار مُنتَجاتهم الخاصة وَفق ميولهم.

بيئة التعلُّم: يُقصَد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. من الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم: التحقُّق من وجود أماكن في غرفة الصف يُمكِن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك وجود أماكن أُخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.

استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، تساعد مناهج الرياضيات المُطوَّرة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في هذا الدليل، علمًا بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكِن لك اختيار طرائق التدريس المناسبة داخل غرفة الصف؛ فأنت أكثر علمًا بأحوال غرفة الصف، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على تقديم الدروس:

التعلُّم المقلوب (Flipped Learning):

يسهم هذا الأسلوب في تعزيز مهارات التعلم الذاتي واستثمار وقت الحصة الصفية استثمارًا كبيرًا والتركيز على المحتوى والمفاهيم العلمية بشكل مكثف. تتيح هذه الاستراتيجية لك إعداد الدروس وإطلاع الطلبة عليها مسبقًا بالاستعانة بالتقنيات الحديثة وشبكة (الإنترنت)، إذ يمكن إرسال مقاطع مرئية (فيديوهات) أو ملفات صوتية أو غيرها من الوسائط إلى الطلبة، والطلب إليهم الاطلاع عليها في المنازل قبل وقت كافٍ من الوقت المخصص لعرض الدرس، عن طريق الوسائل المتاحة لهم (حاسوب، هاتف ذكي، جهاز لوحي). يتعين عليك تجهيز أنشطة متنوعة لتنفيذها في اللقاء الصفي تهدف إلى تطبيق المفاهيم التي اكتسبها الطلبة ومناقشة المحتوى العام للدرس، وتشمل أنشطة التعلم النشط والاستقصاء، والتجريب، وحلّ المسائل الرياضية، وبما يعزز مهارات العمل بروح الفريق وتقييم التعلم.

بطاقة الخروج (Exit Ticket):

أسلوب يتضمَّن مهمة قصيرة يُنفِّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدَّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة، بعد ذلك عليك جمع البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثِّل تغذية راجعة يُستنَد إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت) (Hand Up):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف. وفيه عليك رفع يدك، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشاتهم فورًا. تُعَدُّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكِن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنَّ رفع يدك يجب أنْ يُقابَل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقَّمة (Numbered Heads):

أسلوب يُستعمَل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجابتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل فرد في المجموعة رقم خاص، وعند طلبك الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، يختار الفرد رقمًا من دون أنْ يعرف زميله/ زميلتها، فيجيب من يقع عليه الاختيار عن السؤال، ويمكن أن يتم ذلك بمساعدة أفراد المجموعة.

أنا أُفكِّر، نحن نُفكِّر (I Think, We Think):

أسلوب يُستعمَل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعِدُّ كل مجموعة ورقة تتضمَّن جدولًا من عمودين؛ عنوان الأوَّل: (أنا أُفكِّر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكِّر). ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوَّل، ثم يُناقِش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكِن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمُّل التغيُّر في تفكيرهم نتيجة التحدُّث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة (Small Boards):

أسلوب يُستعمَل للتقويم. وفيه يُمسِك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكِن أنْ يُصنَع من قطعة كرتون مقوًّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطبشور، أو قطعة كرتون عليها لاصق شفّاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ للتمكن من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهِم هذه الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنَّهم يجيبون جميعًا في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهِم أيضًا في التقويم التكويني؛ إذ يمكنك ملاحظة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.

الوحدة
1

البرمجة الخطية
Linear Programming

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: حل المتباينة الخطية بمُتغيِّرين.	• تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيَّن حلًّا للمتباينة. • حل متباينة خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.	منطقة الحلول المُمكِنة. المستقيم الحدودي.	• أوراق رسم بياني.	3
الدرس 2: حل نظام متباينات خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.	• تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيَّن حلًّا لنظام متباينات خطية. • حل نظام متباينات خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.	نظام المتباينات الخطية . مجموعة الحل.	• أوراق رسم بياني.	3
معمل برمجية جيوجبرا: تمثيل نظام متباينات خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.	• استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام متباينات خطية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحل.		• جهاز حاسوب.	1
الدرس 3: البرمجة الخطية.	• نمذجة مواقف حياتية بمسائل يُمكِن حلها بالبرمجة الخطية. • حل مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.	القيود. البرمجة الخطية. منطقة الحلول المُمكِنة. الاقتران الهدف. الحل الأمثل.	• أوراق رسم بياني.	3
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				12 حصة

الوحدة 1

نظرة عامة على الوحدة:

سـيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة كيفية حـل متباينة خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا، وتحديـد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيَّن يُحقِّق المتباينة أم لا، وحل نظام من المتباينات الخطية بمُتغيِّرين بيانيًّـا، وتحديد منطقـة الحلول المُمكِنة والمسـتقيمات الحدودية لهذه المنطقة.

سيتعلَّم الطلبة أيضًا أحد أهم تطبيقات المتباينات الخطية، عن طريق ما يُسـمّى البرمجة الخطية التي يُمكِن بها إيجاد الحل الأمثل لاقتران هدف معطى لمسائل عملية من الحياة اليومية.

الوحدة
1
البرمجة الخطية
Linear Programming

ما أهمية هذه الوحدة؟

طُوِّرت نظرية البرمجـة الخطية في بداية الحرب العالميـة الثانية عـام 1939م، واسـتُعمِلت لتقليل التكلفة وزيادة الإنتاجية فـي كثير من المجالات، وقد استفادت منها الشـركات التجارية في جَنْي مزيد من الأرباح وتقليل الخسائر، وكذلك جدولة رحلات الطيران، وإنشاء خطوط الهاتف. سأتعرَّف في هذه الوحدة البرمجية الخطية، وبعض تطبيقاتها الحياتية.

6

الوحدة
1


تعلّمْتُ سابقًا:
✓ حَلَّ متباينة خطية بمتغير واحد، وتمثيلها على خط الأعداد.
✓ تمثيل متباينة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي.
✓ حَلَّ نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين.
✓ تمثيل نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين بيانيًّا.

سأتعلّم في هذه الوحدة:
◂ حَلَّ متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.
◂ حَلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا.
◂ حَلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين باستعمال برمجية جيوجبرا.
◂ حَلَّ مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (9 – 6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

7

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف الثامن والصف التاسع:

- تعرُّف مفهوم المتباينة، وتمثيلها على خط الأعداد.
- حل متباينات خطية بمُتغيِّر واحد جبريًّا، وتمثيل حلها على خط الأعداد.
- حل متباينات مُركَّبة، وتمثيل حلها على خط الأعداد.
- حل متباينات قيمة مُطلَقة.
- تمثيل المعادلة الخطية بيانيًّا.
- تمثيل متباينة خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيَّن حلًّا للمتباينة.
- حل متباينة خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.
- تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيَّن حلًّا لنظام متباينات خطية.
- حل نظام متباينات خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.
- حل مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

الدرس
1

نتاجات الدرس

- تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيَّن حلًّا للمتباينة.
- حل متباينة خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تعرُّف مفهوم المتباينة، وتمثيلها على خط الأعداد.
- حل متباينات خطية بمُتغيِّر واحد جبريًّا، وتمثيل حلها على خط الأعداد.
- تمثيل معادلة خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.
- تمثيل متباينة خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أَصِفُ للطلبة عددًا مجهولًا في متباينة، ثم أطلب إليهم كتابة المتباينة التي تُعبِّر عن هذا الوصف وحلها.

مثال:

أُفكِّر في العدد n الذي إذا ضاعفته، وطرحت من الناتج 4، فإنَّني أحصل على عدد أكبر من أو يساوي 10

- أُكرِّر النشاط بوصف أعداد أخرى للطلبة.

الدرس
1

حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا
Solving Linear Inequality in Two Variables Graphically

فكرة الدرس حَلُّ متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.

المصطلحات منطقة الحلول المُمكِنة، المستقيم الحدودي.

مسألة اليوم تصنع نهى أساور وأطواقًا من الخرز، وتستعمل 10 حبّات من الخرز لصنع السِّوار الواحد، و45 حبَّة لصنع الطوق الواحد.
كم سِوارًا وطوقًا يُمكِنها أنْ تصنع من 214 حبَّة خرز؟

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المتباينة الخطية جملة رياضية تحوي الرمز $\geq$، أو $\leq$، أو $>$، أو $<$، وأنَّها قد تحتوي على متغير واحد أو متغيرين. من الأمثلة على المتباينات الخطية بمتغيرين:

$\boxed{x - 4y < -1}$ $\boxed{3x + 2y > 2}$ $\boxed{2x + y \leq 1}$

يكون الزوج المُرتَّب (a, b) حلًّا للمتباينة الخطية بمتغيرين إذا كان الناتج صحيحًا عند تعويض إحداثيه في المتباينة.

أتذكَّر

تكون جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على العدد a حلًّا للمتباينة: $x>a$، وتكون جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على (أو تساوي) العدد a حلًّا للمتباينة: $x \geq a$.

مثال 1

أُحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حلًّا للمتباينة: $x - y \leq 3$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $(1, 2)$

أُعوِّض الزوج المُرتَّب $(1, 2)$ في المتباينة:

المتباينة الخطية	$x - y \leq 3$
بالتعويض	$1 - 2 \overset{?}{\leq} 3$
الناتج صحيح	$-1 \leq 3$ ✓

ألاحِظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المُرتَّب $(1, 2)$ يُمثِّل حَلًّا لها.

2 $(7, 3)$

أعوِّض الزوج المُرتَّب $(7, 3)$ في المتباينة:

المتباينة الخطية	$x - y \leq 3$
بالتعويض	$7 - 3 \overset{?}{\leq} 3$
الناتج غير صحيح	$4 \nleq 3$ ✗

ألاحِظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، الزوج المُرتَّب $(7, 3)$ لا يُمثِّل حَلًّا لها.

3 $(2, -1)$

أعوِّض الزوج المُرتَّب $(2, -1)$ في المتباينة:

المتباينة الخطية	$x - y \leq 3$
بالتعويض	$2 - (-1) \overset{?}{\leq} 3$
الناتج صحيح	$3 \leq 3$ ✓

ألاحِظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المُرتَّب $(2, -1)$ يُمثِّل حَلًّا لها.

رموز رياضية

يُمكِن استعمال رموز عِدَّة للدلالة على عدم تحقُّق المتباينة. فمثلًا، للتعبير عن عدم تحقُّق (أقل) أو (يساوي)، يُمكِن استعمال أحد الرمزين الآتيين: $\nleq$, $\not\leq$

أتحقَّق من فهمي

أحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x + 2y > 1$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(2, 3)$ b) $(1, -2)$ c) $(1, 0)$

a) يُمثِّل الزوج المُرتَّب حلًّا للمتباينة.

b) لا يُمثِّل الزوج المُرتَّب حلًّا للمتباينة.

c) لا يُمثِّل الزوج المُرتَّب حلًّا للمتباينة.

عند تمثيل المتباينة الخطية بيانيًا في المستوى الإحداثي، فإنَّ النقاط التي تُمثِّل جميع حلولها المُمكِنة تُسمّى **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible reagion). لتمثيل المتباينة بيانيًا، أبدأ برسم مستقيم المعادلة المرافقة للمتباينة، التي أحصل عليها باستبدال الرمز ($\leq$ ، $\geq$ ، $>$ ، $<$) برمز المساواة ($=$)، حيث تُمثِّل المعادلة الناتجة مستقيمًا يُسمّى **المستقيم الحدودي** (boundary line)؛ وهو مستقيم يُقسِّم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول المُمكِنة.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - إلى كم حبَّة خرز تحتاج نهى لصنع السوار الواحد؟ 10 حبّات.
  - إلى كم حبَّة خرز تحتاج نهى لصنع الطوق الواحد؟ 45 حبَّة.
  - كم حبَّة خرز توجد مع نهى؟ 214 حبَّة.
  - ما عدد المجاهيل في المسألة؟ مجهولان.
  - أَصِفُ هذين المجهولين. عدد الأساور، وعدد الأطواق.
  - كيف يُمكِن لنهى تحديد عدد الأطواق والأساور التي تريد صنعها من 214 حبَّة خرز؟ إجابة مُحتمَلة: بكتابة متباينة تُعبِّر عن المسألة، ثم حلها.
  - كم سوارًا وطوقًا يُمكِنها أنْ تصنع من 214 حبَّة خرز؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم المتباينة الخطية بمُتغيِّرين، ثم أعطي أمثلة عليها.
- أُبيِّن للطلبة أنَّ الزوج المُرتَّب يُمثِّل حلًّا للمتباينة إذا كانت المتباينة الناتجة صحيحة عند تعويض إحداثيي الزوج المرتب في المتباينة. وخلافًا لذلك، فإنَّه لا يكون حلًّا.
- أُذكِّر الطلبة بكيفية اختبار إذا كانت نقطة معطاة تُمثِّل حلًّا لمعادلة خطية بمُتغيِّرين أم لا.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا ضرورة تبرير خطوات الحل.

إرشادات:

- يُفضَّل استعمال الأقلام المُلوَّنة أثناء شرح المثال 1، في خطوة تعويض إحداثيي الزوج المُرتَّب؛ لِما لذلك من أثر في تحفيز الطلبة على تخيُّل عملية التعويض، وبخاصة أولئك الذين يتمتَّعون بذكاء بصري.
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة في تحديد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حلًّا للمتباينة أم لا، وذلك بتعويض الإحداثي x للزوج المُرتَّب مكان المُتغيِّر y في المتباينة، وتعويض الإحداثي y للزوج المُرتَّب مكان المُتغيِّر x في المعادلة؛ لذا أطلب إلى الطلبة كتابة كل مُتغيِّر فوق الإحداثي المناسب له في الزوج المُرتَّب.

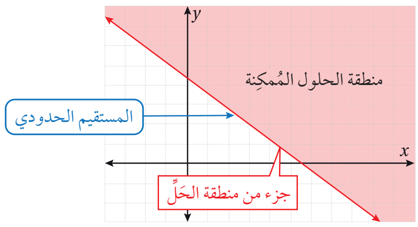
تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

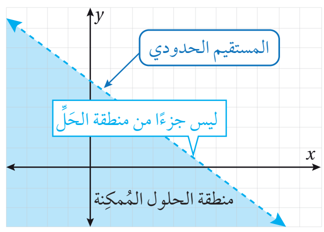
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز ≥ أو الرمز ≤، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي متصلًا كما في الشكل الآتي:



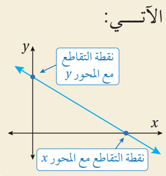
وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز < أو الرمز >، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي مُتقطِّعًا كما في الشكل الآتي:



لتحديد أيِّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول المُمكِنة، أختار أيَّ نقطة (a, b) لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أُعوِّضها في المتباينة الخطية، فإذا كانت تُحقِّقها (أيْ ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أُظلِّل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلّا أُظلِّل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

أتذكَّر

لتمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y = 0$ في المعادلة، ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x = 0$ في المعادلة، ثم أصل بين نقطتي التقاطع بمستقيم كما في الشكل الآتي:



مثال 2

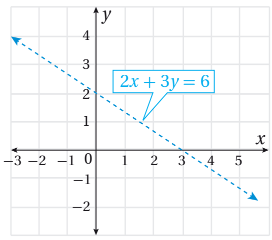
أُمثِّل المتباينة الخطية: $2x + 3y < 6$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أُمثِّل المستقيم الحدودي.

أُمثِّل المستقيم الحدودي: $2x + 3y = 6$ بيانيًّا، ثم أُنشِئ جدول قِيَم لإيجاد نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين:

x	0	3
y	2	0

بعد ذلك أُعيِّن النقطتين $(3, 0)$ و$(0, 2)$ في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيمًا يمرُّ بهما. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّ المستقيم الحدودي يُرسَم مُتقطِّعًا كما في الشكل المجاور.



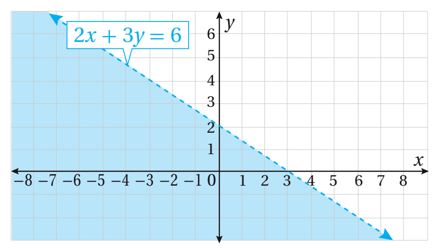
الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(1, -2)$، ثم أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

المتباينة الخطية	$2x + 3y < 6$
بالتعويض	$2(1) + 3(-2) \overset{?}{<} 6$
الناتج صحيح	$-4 < 6$ ✓

الخطوة 3: أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة.

بما أنَّ النقطة $(1, -2)$ أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي:



أتحقَّق من فهمي أنظر الهامش.

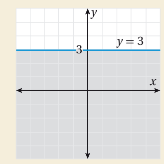
أُمثِّل المتباينة الخطية: $4x - 5y \geq 20$ في المستوى الإحداثي.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

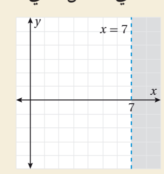
للمتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية؛ إذ تساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلِّق بتحديد القِيَم المُمكِنة ضمن شروط مُحدَّدة.

أتذكَّر

تُمثَّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $y \leq 3$، كما في الشكل الآتي:



في حين تُمثَّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $x > 7$، كما في الشكل الآتي:



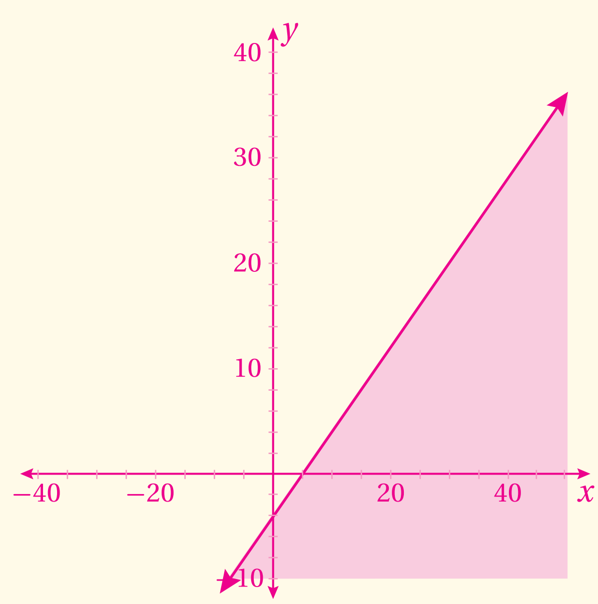
11

مثال 2

- أُخبِر الطلبة أنَّ (منطقة الحلول المُمكِنة) هي منطقة تقع في المستوى الإحداثي، وتحوي جميع الحلول المُمكِنة للمتباينة، ثم أُبيِّن لهم معنى المستقيم الحدودي (الخط المستقيم الناتج من استبدال رمز المتباينة إلى مساواة)، وأنَّه يُقسِّم المستوى الإحداثي إلى منطقتين؛ إحداهما بالضرورة هي منطقة الحلول المُمكِنة.
- أوضح للطلبة أنَّه لتحديد منطقة الحلول المُمكِنة، فإنَّني أختار أيَّ نقطة في إحدى المنطقتين، ثم أُعوِّضها في المتباينة. فإذا تحقَّقت المتباينة كانت تلك المنطقة هي منطقة الحلول المُمكِنة، مُؤكِّدًا معنى وجود المساواة أو عدم وجودها في المتباينة، من حيث احتواء منطقة الحلول المُمكِنة على المستقيم الحدودي أو لا.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، مُبيِّنًا لهم أنَّ البداية تكون دائمًا بتمثيل المستقيم الحدودي، وذلك بإيجاد نقطتين عليه، ثم تعويض أيِّ نقطة غير واقعة على هذا المستقيم. فإذا تحقَّقت المتباينة كانت المنطقة التي تحوي تلك النقطة هي منطقة الحلول المُمكِنة. أمّا المستقيم الحدودي فإنَّه يكون جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة في حال احتوت المتباينة على رمز المساواة.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من تمكُّنهم من مهارة تمثيل المتباينة الخطية بمُتغيِّرين في المستوى الإحداثي.

إرشاد: أُذكِّر الطلبة بأنَّه يُمكِن تمثيل المستقيم بنقطتين، وأنَّ أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطية هي إيجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين (إنْ أمكن).

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):



مثال 3: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة أهمية المتباينات الخطية بمُتغيِّرين في المواقف العملية والحياتية، ثم أذكر بعض الأمثلة على ذلك.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3، ثم أُوضِّح للطلبة المعطيات والمطلوب، مُفترِضًا أنَّ عدد السيارات الصغيرة في هذا المثال هو x، وأنَّ عدد السيارات الكبيرة هو y.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال على اللوح.

إرشاد: أُبيِّن للطلبة أنَّ بعض المسائل العملية تتطلَّب حلولاً صحيحةً موجبةً كما في المثال 3، وأنَّ المساحة التي ستُستعمَل للمواقف لا يُشترَط بالضرورة أنْ تكون مساوية للمساحة الكلية المتوافرة، إلّا أنَّها يجب أنْ تكون أقل من تلك المساحة، أو مساوية لها.

تنبيه: أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّه عند محاولة إيجاد عدد السيارات الكبيرة والصغيرة التي سيتَّسع الموقف لها، فإنَّ التمثيل البياني لن يكون دقيقًا بصورة كافية لتحديد العدد المطلوب؛ لذا يُستعمَل الرسم دليلًا لإيجاد الأعداد الصحيحة المطلوبة عن طريق التعويض، والتحقُّق من صحَّة الإجابة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 3، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا البيئية التي أهمها المشكلات المرورية، ثم أطلب إليهم البحث في شبكة الإنترنت عن السياسات التي تنتهجها الدول لحل المشكلات المرورية، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

مثال 3 : من الحياة

مواقف: موقف سيّارات مساحته $1400\ m^2$، وهو يتَّسع لعدد x من السيّارات الصغيرة، وعدد y من السيّارات الكبيرة. إذا كانت المساحة التي تقف عليها السيّارة الصغيرة $14\ m^2$، والمساحة التي تقف عليها السيّارة الكبيرة $35\ m^2$، فأجد عدد السيّارات الصغيرة والكبيرة التي يُمكِن أنْ يتَّسع لها هذا الموقف.

معلومة

تُعَدُّ مواقف السيّارات الطابقية أحد أهمِّ الحلول لمشكلة تزايد عدد السيّارات.

الخطوة 1 : أُعبِّر عن المسألة جبريًّا بمتباينة خطية.

$$14x + 35y \leq 1400$$

الخطوة 2 : أُمثِّل المتباينة بيانيًّا.

أُمثِّل بيانيًّا المستقيم الحدودي: $14x + 35y = 1400$. وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّ المستقيم يُرسَم متصلًا.

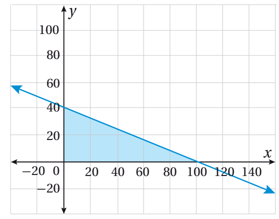
أختار أيَّ نقطة، مثل $(20, 30)$، ثم أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

المتباينة الخطية	$14x + 35y \leq 1400$
بالتعويض	$14(20) + 35(30) \overset{?}{\leq} 1400$
الناتج صحيح	$1330 \leq 1400$ ✓

بما أنَّ النقطة $(20, 30)$ أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي:

الوحدة 1

الخطوة 3 : أُحدِّد حَلَّ المسألة.



أُلاحِظ أنَّ قِيَم x و y يجب أنْ تكون صحيحة وموجبة؛ لأنَّها تُمثِّل أعداد سيّارات؛ ما يُقلِّص منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.

أُلاحِظ أيضًا أنَّ أيَّ نقطة إحداثياها عددان صحيحان موجبان، وتقع على المستقيم الحدودي، أو ضمن المنطقة المُظلَّلة التي تظهر على شكل مثلث، تُعَدُّ حَلًّا. فمثلًا، النقطة $(40, 20)$ تُمثِّل حَلًّا للمتباينة؛ لأنَّ المساحة التي تَشْغَلها 40 سيّارة صغيرة و20 سيّارة كبيرة $1260\ m^2$، وهي أقل من مساحة موقف السيّارات البالغة $1400\ m^2$.

أتحقَّق من فهمي أنظر الهامش.

مطاعم: مطعم مساحة صالته $64\ m^2$، وهي تتَّسع لعدد x من الطاولات الصغيرة، وعدد y من الطاولات الكبيرة. تَشْغَل الطاولة الصغيرة مساحة $2.5\ m^2$، وتَشْغَل الطاولة الكبيرة مساحة $4\ m^2$. أجد عدد الطاولات الصغيرة والكبيرة التي يُمكِن وضعها في صالة المطعم.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x - 3y \geq 5$:

1) $(1, -2)$ يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
2) $(5, 0)$ يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
3) $(-4, 1)$ لا يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
4) $(-3, -4)$ يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
5) $(-4, 0)$ لا يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
6) $(5, 2)$ لا يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $5x - 2y < 6$:

7) $(0, 0)$ يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
8) $(2, 2)$ لا يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
9) $(4, 1)$ لا يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
10) $(-2, -1)$ يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
11) $(-2, -8)$ لا يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.
12) $(-1, -6)$ لا يُمثِّل الزوج حلًّا للمتباينة.

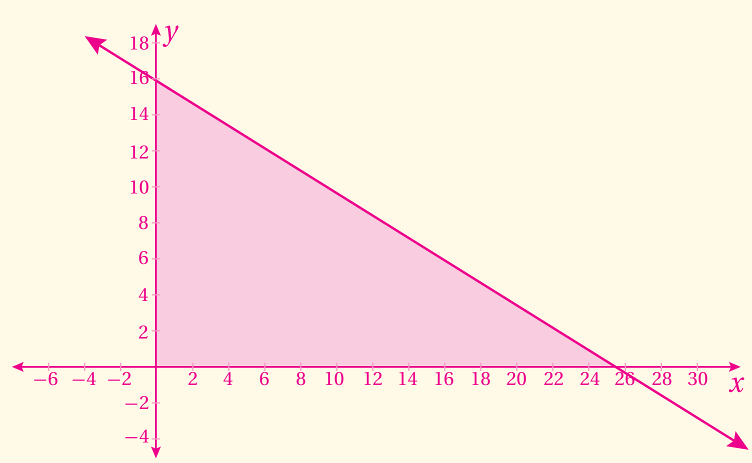
أُمثِّل كُلًّا من المتباينات الخطية الآتية في المستوى الإحداثي: (13–18)، أنظر ملحق الإجابات.

13) $8y + 3x < 2$
14) $4x \leq 8$
15) $2x - 9y \geq -3$
16) $5y - 8x \geq 1$
17) $-3y < 12$
18) $6x + 3y > -5$

13

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

$2.5x + 4y \leq 64$



أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل؛ لأنَّها تُمثِّل أعداد طاولات. أُلاحِظ وجود أكثر من حل للمسألة، مثل: $(12, 8)$ $(0,12)$، $(2, 2)$ ، $(2, 0)$، وغيرها كثير.

تنويع التعليم:

في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا بمتباينة؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة قراءة المسألة برَوِيَّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–20) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

توسعة:

أطلب إلى الطلبة المُتميِّزين كتابة مسألة حياتية يُمكِن التعبير عنها بمتباينة خطية بمُتغيِّرين.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (24–26).

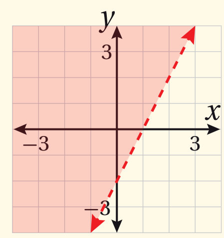
الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 22, 24 كتاب التمارين: (1−10)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (21−24) كتاب التمارين: 11, 12
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 21, (24−26) كتاب التمارين: 13, 14

5 الإثراء

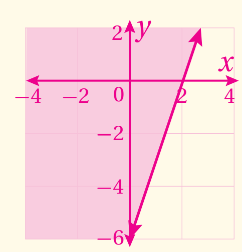
- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - أكتب المتباينة الخطية بمُتغيِّرين، المعطى تمثيلها البياني في الشكل المجاور، مُبرِّرًا إجابتي. $y > 2x - 2$.



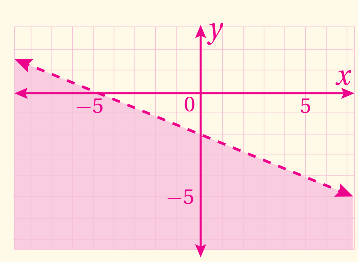
6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - أُمثِّل كل متباينة خطية ممّا يأتي في المستوى الإحداثي:

1) $3x - y \le 6$



2) $2x + 5y < -10$



(19−21)، أنظر ملحق الإجابات.

19 **اختبارات:** تُمثِّل المتباينة: $3x + 2y \ge 93$ عدد أسئلة الاختيار من مُتعدِّد (x)، وأسئلة ملء الفراغ (y) التي يتعيَّن على منى الإجابة عنها بصورة صحيحة لنيل درجة A في اختبار التربية الإسلامية. إذا أجابت منى إجابة صحيحة عن 20 سؤالًا من أسئلة الاختيار من مُتعدِّد، وعن 18 سؤالًا من أسئلة ملء الفراغ، فهل ستنال درجة A في الاختبار؟

20 **شاحنات:** تستطيع شاحنة حمل 4000 kg من صناديق البضائع. إذا وُجِد عدد x من الصناديق التي كتلة كلٍّ منها 50 kg، وعدد y من الصناديق التي كتلة كلٍّ منها 95 kg، فما عدد الصناديق التي يُمكِن للشاحنة حملها من كلا النوعين؟

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

21 أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ المتباينة: $x + y < c$، حيث c عدد صحيح موجب.

22 أيُّ جهتي المستقيم في الشكل المجاور تُمثِّل منطقة حَلِّ المتباينة الآتية، مُبرِّرًا إجابتي؟

$y \le x + 2$

الجهة الواقعة تحت المستقيم الحدودي؛ لأنَّ النقطة (0, 0) تُحقِّق المتباينة، حيث 0 أصغر من أو يساوي 2 + 0

23 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشف الخطأ:** مثَّل سفيان المتباينة: $y \le 3x - 2$ بيانيًّا على النحو الآتي:

الخطأ في تمثيل سفيان هو تظليل المنطقة الأخرى التي لا تُمثِّل منطقة الحل.

أكتشف الخطأ في تمثيل سفيان، ثم أُصحِّحه.

25 **تبرير:** عند تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا، لماذا تُختار فقط نقطة اختبار لا تقع على المستقيم الحدودي؟ أُبرِّر إجابتي. لأنَّ جميع النقاط التي تقع على المستقيم الحدودي تُحقِّق دائمًا المعادلة المُرتبِطة بالمتباينة.

26 **تحدٍّ:** أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تقع النقطتان $(-2, -5)$ و$(3, 5)$ على المستقيم الحدودي، وتقع النقطتان $(5, 6)$ و$(3, 2)$ في منطقة الحلول المُمكِنة، ثم أُمثِّل المتباينة بيانيًّا.

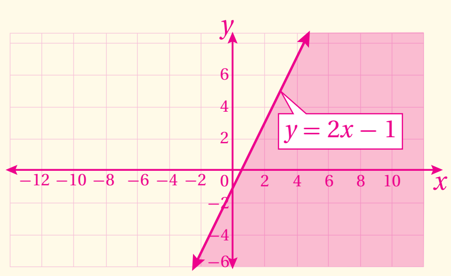
أنظر الهامش.

14

إرشاد: في السؤال 24 **(أكتشف الخطأ)**، أَلفِت انتباه الطلبة إلى التحقُّق من أنَّ المنطقة المُظلَّلة تُمثِّل منطقة الحلول المُمكِنة للمتباينة أم لا.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

26) $y \le 2x - 1$



الدرس 2

حَلُّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

فكرة الدرس حَلُّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا.

المصطلحات نظام المتباينات الخطية، مجموعة الحَلِّ.

مسألة اليوم قدَّم محَلٌّ لتبديل زيوت السيّارات عرضًا مجانيًا لغسل السيّارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيّارة يوميًّا، بتكلفة لا تزيد على 75 دينارًا، فكم سيّارة كبيرة وصغيرة يُمكِن غسلها يوميًّا بحسب هذا العرض؟

تكلفة غسل السيّارة الكبيرة 3 دنانير.

تكلفة غسل السيّارة الصغيرة ديناران.

يتكوَّن **نظام المتباينات الخطية** (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلَق على مجموعة الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق جميع المتباينات اسم **مجموعة الحَلِّ** (solution set). فمثلًا، يتكوَّن النظام الآتي من ثلاث متباينات:

المتباينة الأولى	$x + y < 2$
المتباينة الثانية	$-2x + y > -1$
المتباينة الثالثة	$x - 3y \leq -2$

يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنَّه يُحقِّق المتباينات جميعها.

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الأولى	$-1 + 2 = 1 < 2$ ✓
الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الثانية	$-2(-1) + 2 = 4 > -1$ ✓
الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الثالثة	$-1 - 3(2) = -7 \leq -2$ ✓

لحَلِّ نظام متباينات، أُمثِّل كل متباينة فيه بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أُظلِّل المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات جميعها التي تُمثِّل حَلَّ النظام.

أتعلَّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات

تدل جملة (الزوج المُرتَّب يُحقِّق متباينة) على أنَّ الناتج يكون صحيحًا عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيَّن حلًّا لنظام متباينات خطية.
- حل نظام متباينات خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- حل متباينة خطية بمُتغيِّرين.
- حل نظام معادلات خطية.
- تحديد إذا كان مستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين أو متقاطعين، وإيجاد نقطة تقاطعهما.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب على اللوح نظامًا مُكوَّنًا من معادلتين خطيتين بسيطتين، ونظامًا آخرَ مُكوَّنًا من متباينتين خطيتين بسيطتين، ثم أسأل الطلبة:
  - ◂ ما الفرق بين النظامين؟ أحد النظامين يتكوَّن من معادلات، والآخر يتكوَّن من متباينات.
  - ◂ ماذا تعني عبارة (حل نظام المعادلات الخطية هندسيًّا)؟ تعني هذه العبارة أنَّ الحل يُمثِّل نقطة تقاطع الخطين المستقيمين اللذينِ يُعبِّران عن المعادلتين.
- أطلب إلى الطلبة حل نظام المعادلات الخطية بيانيًّا، ثم أسألهم:
  - ◂ ماذا تعني عبارة (حل نظام المتباينات الخطية هندسيًّا)؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

2 الاستكشاف

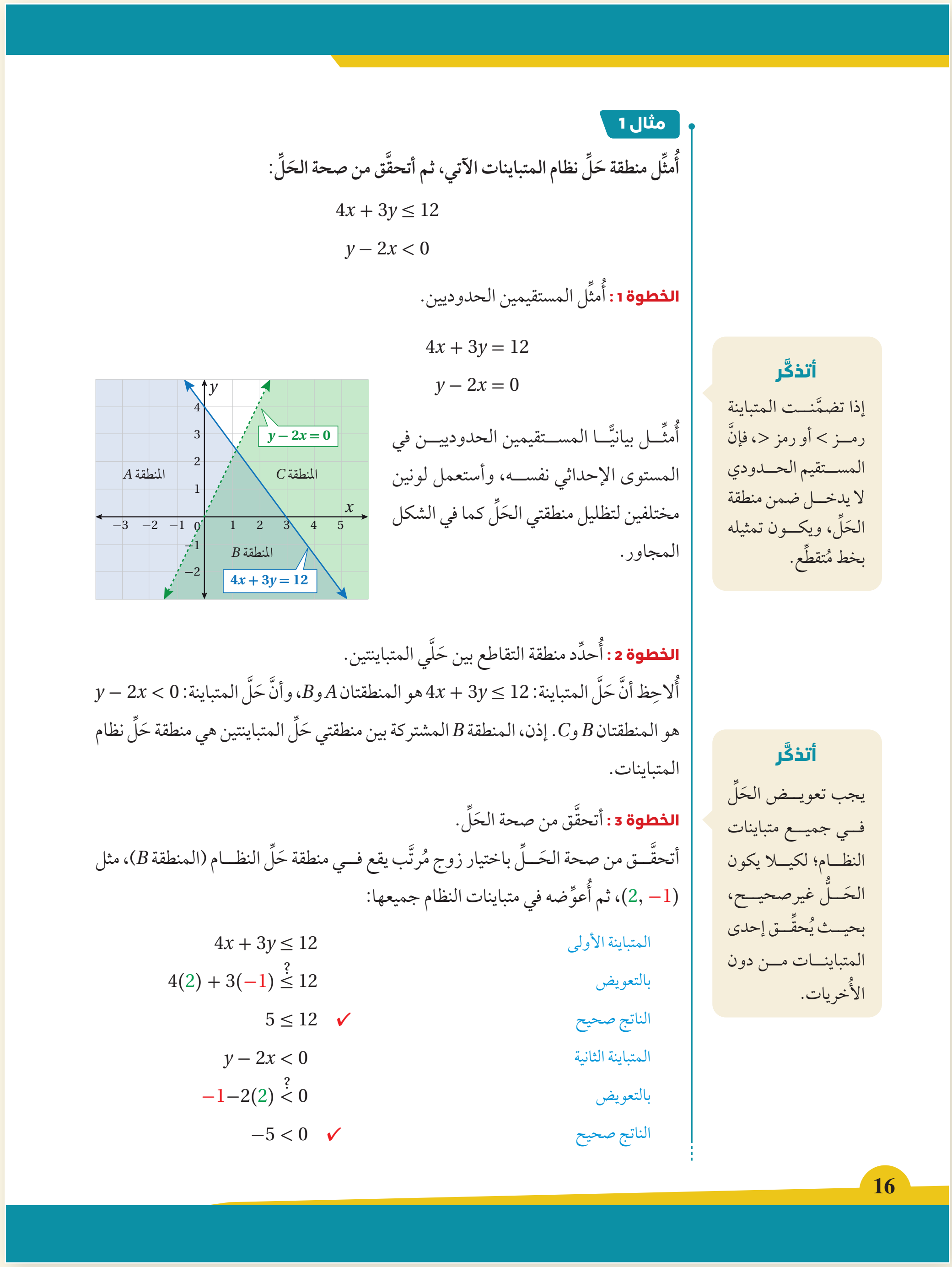
- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ما تكلفة غسل السيارة الكبيرة؟ 3 دنانير.
  - ما تكلفة غسل السيارة الصغيرة؟ ديناران.
  - ما الحد الأقصى للسيارات الذي يُمكِن للمحل غسلها يوميًّا؟ 30 سيارة.
  - ما التكلفة التي حدَّدها المحل لغسل السيارات مجّانًا؟ ألّا تزيد تكلفة غسل السيارات على 75 دينارًا يوميًّا.
  - أكتب متباينتين خطيتين بمُتغيِّرين تُمثِّلان الموقف المعطى. $x + y \leq 30, 3x + 2y \leq 75$.
  - كم سيارة كبيرة وصغيرة يُمكِن غسلها يوميًّا بحسب هذا العرض؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُقدِّم للطلبة مفهوم كلٍّ من نظام المتباينات الخطية، ومجموعة حل النظام.
- أكتب على اللوح نظام المتباينات الوارد في الفقرة التي تسبق المثال 1، ثم أسأل الطلبة:
  - من كم متباينة يتكوَّن هذا النظام؟ من ثلاث متباينات.
  - كيف يُمكِن التأكُّد أنَّ زوجًا مُرتَّبًا يُحقِّق نظام المتباينات أم لا؟ بتعويض الزوج المُرتَّب في المتباينات الثلاث، والتأكُّد أنَّه يُحقِّق المتباينات الثلاث جميعها.
- أطلب إلى الطلبة التحقُّق من أنَّ الزوج المُرتَّب $(-1, 2)$ يُمثِّل حلًّا لنظام المتباينات أم لا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة أثناء ذلك.
- أطلب إلى الطلبة التحقُّق من أنَّ الزوج المُرتَّب $(1, 0)$ يُمثِّل حلًّا لنظام المتباينات أم لا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة أثناء ذلك.
- أسأل الطلبة:
  - هل الزوج المُرتَّب $(-1, 2)$ هو الزوج المُرتَّب الوحيد الذي يُحقِّق نظام المتباينات؟ لا.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى وجود عدد لانهائي من الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق هذا النظام.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ حل نظام من المتباينات الخطية يتطلَّب تمثيل كل متباينة في النظام بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، ثم تظليل المنطقة المُشترَكة بين جميع مناطق حلول المتباينات التي تُكوِّن النظام.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة



مثال 1

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

$$4x + 3y \le 12$$
$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: أُمثِّل المستقيمين الحدوديين.

$$4x + 3y = 12$$
$$y - 2x = 0$$

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين في المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحَلِّ كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة التقاطع بين حَلَّي المتباينتين.

أُلاحِظ أنَّ حَلَّ المتباينة: $4x + 3y \le 12$ هو المنطقتان A وB، وأنَّ حَلَّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B وC. إذن، المنطقة B المشتركة بين منطقتي حَلِّ المتباينتين هي منطقة حَلِّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: أتحقَّق من صحة الحَلِّ.

أتحقَّق من صحة الحَلِّ باختيار زوج مُرتَّب يقع في منطقة حَلِّ النظام (المنطقة B)، مثل $(2, -1)$، ثم أُعوِّضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى	$4x + 3y \le 12$
بالتعويض	$4(2) + 3(-1) \overset{?}{\le} 12$
الناتج صحيح	$5 \le 12$ ✓
المتباينة الثانية	$y - 2x < 0$
بالتعويض	$-1 - 2(2) \overset{?}{<} 0$
الناتج صحيح	$-5 < 0$ ✓

أتذكَّر

إذا تضمَّنت المتباينة رمز > أو رمز <، فإنَّ المستقيم الحدودي لا يدخل ضمن منطقة الحَلِّ، ويكون تمثيله بخط مُتقطِّع.

أتذكَّر

يجب تعويض الحَلِّ في جميع متباينات النظام؛ لكيلا يكون الحَلُّ غير صحيح، بحيث يُحقِّق إحدى المتباينات من دون الأخريات.

16

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أنَّ حل نظام من المتباينات الخطية يتطلَّب تحديد منطقة الحلول المُمكِنة لكل متباينة، وذلك بتمثيل المستقيم الحدودي للمتباينة، ثم اختيار نقطة من خارج المستقيم بأنَّها تُحقِّق المتباينة أم لا.
- إنْ لزم الأمر، أُناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة حل نظام متباينات خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.

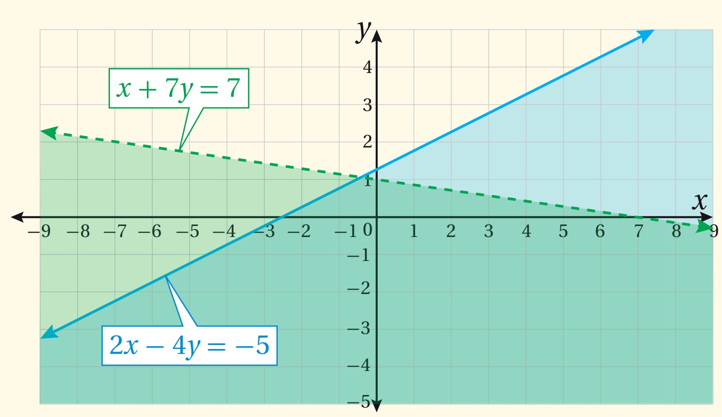
إرشادات:

- أستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحلول المُمكِنة للمتباينتين، مُؤكِّدًا معنى تقاطع المناطق (المنطقة المُظلَّلة باللونين).
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 1):



مثال 2

- أذكِّر الطلبة بمعنى المستقيمات المتوازية، وكيف يُمكِن تحديد إذا كان الخطان المعطيان متوازيين أم لا.
- أُناقِش الطلبة في مثال بسيط على نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين، بحيث لا يكون فيه للنظام حل، مثل: $x+y=1,\ 2x+2y=3$، ثم أذكر للطلبة سبب عدم وجود حل لهذا النظام هندسيًّا؛ وهو أنَّ المستقيمين اللذينِ يُمثِّلان النظام متوازيان، ولا يتقاطعان.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه لا يوجد حل لبعض أنظمة المتباينات الخطية؛ إذ لا يوجد تقاطع بين مناطق الحلول المُمكِنة لجميع المتباينات.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بدءًا بسؤالهم عن العلاقة بين المستقيمين الحدوديين للمتباينتين، من حيث إنَّهما متوازيان أم لا، ثم أَلفِت انتباههم – بعد تمثيل المتباينتين بيانيًّا – إلى ملاحظة أنَّه لا يوجد تقاطع بين منطقتي حل المتباينتين.

إرشاد: أُوضِّح للطلبة معنى عدم وجود نقاط مشتركة بين منطقتي الحلول المُمكِنة للمتباينتين؛ وهو عدم وجود أيِّ نقاط تُحقِّق المتباينتين معًا، ومن ثَمَّ عدم وجود حل للنظام.

تنبيه: أُنبِّه الطلبة أنَّه إذا كان المستقيمان الحدوديان متوازيين، فإنَّ ذلك لا يعني بالضرورة عدم وجود حل لنظام المتباينات؛ إذ يعتمد ذلك على موقع الخطين، وإشارات المتباينات.

أتحقّق من فهمي

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

$2x-4y\ge -5$

$x+7y<7$

أنظر الهامش.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتذكّر

يُرمَز إلى المجموعة الخالية بالرمز { }، أو الرمز ∅ (تُقرَأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا يوجد فيها عناصر.

لا يكون لنظام المتباينات حَلٌّ أحيانًا؛ لعدم وجود منطقة مشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات المُكوِّنة له، عندئذٍ تكون مجموعة الحَلِّ هي المجموعة الخالية.

مثال 2

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$2x-4y\le -2$

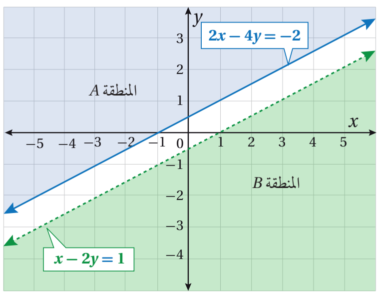
$x-2y>1$

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين الآتيين في المستوى الإحداثي نفسه:

$2x-4y=-2$

$x-2y=1$

وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحَلِّ كما في الشكل المجاور.



أتعلّم

ألاحِظ في المثال 2 عدم وجود منطقة حَلٍّ مشتركة؛ لأنَّ المستقيمين الحدوديين متوازيان.

ألاحِظ أنَّ حَلَّ المتباينة: $2x-4y\le -2$ هو المنطقة A، وأنَّ حَلَّ المتباينة: $x-2y>1$ هو المنطقة B، وأنَّه لا يوجد تقاطع بين منطقتي حَلِّ المتباينتين. إذن، حَلُّ النظام هو المجموعة الخالية ∅.

أتحقّق من فهمي

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$5x-2y<3$

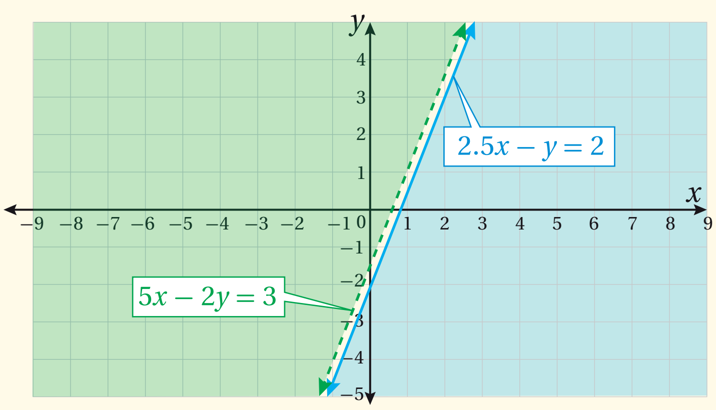
$2.5x-y\ge 2$

أنظر الهامش.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

لا يوجد حل للنظام بسبب عدم وجود منطقة مشتركة.



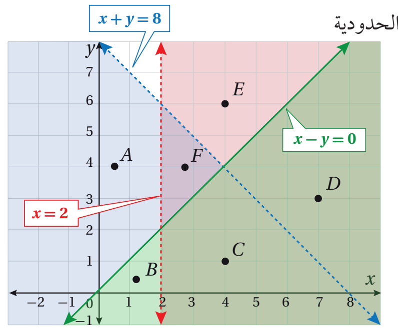
قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحَلِّ هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات جميعها.

مثال 3

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$
$$x + y < 8$$
$$x > 2$$

الخطوة 1: أُمثِّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية الآتيـة في المسـتوى الإحداثي نفسه كما في الشكل المجاور:



$$x - y = 0$$
$$x + y = 8$$
$$x = 2$$

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحَلِّ.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: A, B, C, F.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: B, C, D.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x > 2$ باللون الأحمر، وهي المناطق: C, D, E, F.

أُلاحِظ أنَّ المنطقة C هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات الثلاث. إذن، هي منطقة حَلِّ النظام.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$
$$x - 5y > 6$$
$$2x - 5y < -3$$

أنظر ملحق الإجابات.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

مثال 3

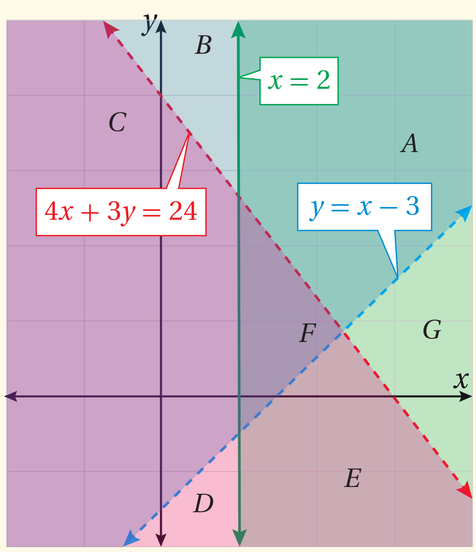
- أُوضِّـح للطلبة أنَّ ما تعلَّموه في المثالين الأوَّلين يُمثِّل طريقـة عامـة لحـل أيِّ نظـام مـن المتباينـات الخطية بمُتغيِّرين، بصرف النظر عن عدد المتباينات.
- أُناقِـش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، بأنْ أطلب إلى ثلاثة منهـم تمثيل المسـتقيمات الحدودية الثلاثة للمتباينات المعطـاة، ثم تحديد كلٍّ منهم منطقة الحل لمتباينة منها.
- أُظلِّل المنطقة المُشـترَكة (منطقـة التقاطع) بين مناطق الحلول الثلاث التي حدَّدها الطلبة أوَّلًا.
- أطلـب إلـى أحـد الطلبـة إيجـاد نقطـة فـي المنطقـة المُشترَكة، ثم تعويضها في المتباينات الثلاث؛ للتأكُّد أنَّها حقَّقتها.
- إنْ لـزم الأمـر، أُناقِـش الطلبـة فـي مزيد مـن الأمثلة؛ للتحقُّـق من إتقانهم مهـارة حل نظـام متباينات خطية بمُتغيِّرين بيانيًّا.

إرشـاد: أُذكِّر الطلبة بأنَّ المستقيم $x = c$ هو دائمًا مستقيم عمودي.

مثال إضافي:

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$y > x - 3$$
$$4x + 3y < 24$$
$$x \geq 2$$



منطقة حـل هذا النظام هي المنطقـة F؛ لأنَّ حل المتباينة $x \geq 2$ هـو المناطـق: A, F, G, E؛ وحـل المتباينـة $4x + 3y < 24$ هو المناطق: C, D, E, F؛ وحل المتباينة $y > x - 3$ هـو المناطـق: A, B, C, F. أمّـا المنطقـة المشتركة بين جميع الحلول فهي F.

مثال 4: من الحياة

- أُؤكِّد للطلبة أهمية المتباينات الخطية في الحياة العملية واليومية، ثم أذكر بعض الأمثلة على ذلك (يُمكِن الاستعانة بالمسائل العملية الواردة في بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**) في نهاية الدرس).
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم ضرورة البدء بافتراض مُتغيِّرات منطقية، وكتابة المُتغيِّرات بوضوح، ثم أطلب إليهم ترجمة كل معطى من المعطيات إلى متباينة خطية.
- أبدأ حل النظام بحسب الخطوات التي تعلَّمها الطلبة سابقًا.
- أبحث مع الطلبة عن نقطة إحداثياتها صحيحة داخل منطقة الحل.

إرشادات:

- أُوضِّح للطلبة المقصود بتركيب (على الأكثر) وتركيب (على الأقل) بلغة المتباينات.
- أُؤكِّد للطلبة أنَّ الحل المطلوب هو حل يجب أنْ تكون فيه قِيَم المُتغيِّرات أعدادًا صحيحة موجبة.

تنبيه: أَلفِت انتباه الطلبة إلى إمكانية إيجاد أكثر من حل للمسائل المُشابِهة للمثال 4، وذلك في حال وجود أكثر من نقطة إحداثياتها صحيحة داخل منطقة الحل.


الوحدة 1

تُستعمَل أنظمة المتباينات الخطية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكِن بها تحديد القِيَم المُمكِنة للمتغيرات وَفق شروط مُحدَّدة.

مثال 4 : من الحياة

كرة قدم: في دوري كرة القدم المدرسي، يحصل الفريق الفائز على 3 نقاط، ويحصل الفريق المتعادل على نقطة واحدة، ولا يحصل الفريق الخاسر على أيِّ نقطة.

إذا فاز فريق مدرسة سلمان في x من المباريات، وتعادل في y من المباريات، وجمع منها 18 نقطة على الأكثر، وكان عدد مرّات فوزه أكثر من عدد مرّات تعادله، وتعادل مرَّتين على الأقل؛ فأجد العدد المُمكِن من المباريات التي فاز فيها الفريق، والعدد المُمكِن من المباريات التي تعادل فيها الفريق.

أُقيمت أول بطولة لكأس العالم في كرة القدم بالأوروغواي عام 1930م.

الخطوة 1: أُعبِّر عن المسألة جبريًّا بنظام من المتباينات الخطية.

أفترض أنَّ عدد مرّات الفوز هو x، وأنَّ عدد مرّات التعادل هو y، ثم أكتب نظام المتباينات الخطية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة:

عدد نقاط الفوز والتعادل 18 على الأكثر $3x + y \leq 18$

عدد مرّات الفوز أكثر من عدد مرّات التعادل $x > y$

تعادل الفريق مرَّتين على الأقل $y \geq 2$

الخطوة 2: أُمثِّل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا.

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمات الحدوديةالآتية على المستوى الإحداثي نفسه:

$$3x + y = 18$$
$$x - y = 0$$
$$y = 2$$

ثم أُظلِّل منطقة الحَلِّ لكل متباينة كما في الشكل المجاور.

ألاحِظ أنَّ مناطق الحَلِّ تتقاطع في منطقة على شكل مثلث، هي منطقة حَلِّ النظام، وأنَّه يُمكِن اختيار نقطة مثل (4, 3) ضمن هذه المنطقة، والتأكُّد أنَّها تُحقِّق المتباينات جميعها على النحو الآتي:

المتباينة الخطية الأولى	$3x + y \le 18$
بالتعويض	$3(4) + 3 \overset{?}{\le} 18$
ناتج صحيح	$15 \le 18$ ✓
المتباينة الخطية الثانية	$x - y > 0$
بالتعويض	$4 - 3 \overset{?}{>} 0$
ناتج صحيح	$1 > 0$ ✓
المتباينة الخطية الثالثة	$y \ge 2$
بتعويض قيمة y، يكون الناتج صحيحًا	$3 \ge 2$ ✓

الخطوة 3: أُحدِّد حَلَّ المسألة.

أيُّ نقطة تقع في منطقة الحَلِّ تُعَدُّ حلًّا لنظام المتباينات الخطية. وفي هذه الحالة، ولأنَّ عدد المباريات يجب أنْ يكون صحيحًا؛ فإنَّ النقطة (4, 3) تُمثِّل أحد الحلول المُمكِنة؛ ما يعني أنَّ الفريق فاز بـ 4 مباريات، وتعادل في 3 مباريات، وجمع 15 نقطة.

لغة الرياضيات

a على الأكثر تُكافِئ $x \le a$، و b على الأقل تُكافِئ $x \ge b$.

أُفكِّر

أكتب قائمة تحوي جميع النقاط التي يُمكِن أنْ تكون حلولًا مُمكِنة لنظام المتباينات الخطية في المثال 4.

أتحقَّق من فهمي

محميات: يوجد في محمية للحيوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يُشرف على إطعامها والاعتناء بها أنَّ:

- **في المحمية 6 حيوانات على الأقل.** أنظر الهامش.
- **عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيوانًا.**
- **عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.**
- **في المحمية اثنين من الغزلان على الأقل.**

a) ما أقل عدد مُمكِن من الأيائل؟

b) ما أكثر عدد مُمكِن من الغزلان؟

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

تُعَدُّ محمية الغزلان في دبين ضمن إحدى أكبر المحميات الطبيعية في الأردن.

تنويع التعليم:

فـي المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا بنظام من المتباينات الخطية؛ لـذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة قراءة المسألة برَوِيَّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

أفترض أنَّ عدد الغزلان هو x، وأنَّ عدد الأيائل هو y.

بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثِّل المسألة:

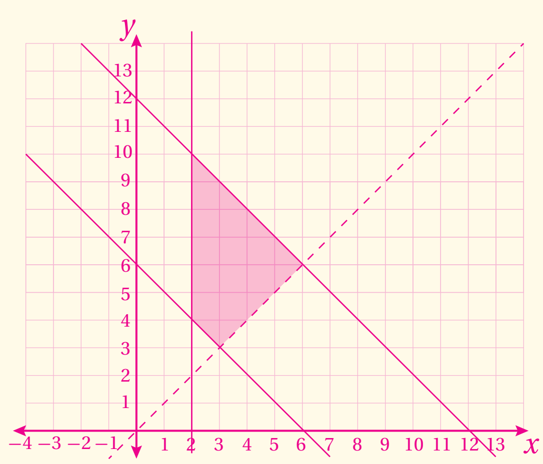
$$x + y \ge 6$$

$$x + y \le 12$$

$$x < y$$

$$x \ge 2$$

بتمثيل النظام بيانيًّا:



a) أقل عدد مُمكِن من الأيائل هو أقل قيمة صحيحة للمُتغيِّر y ضمن منطقة الحل، بحيث تكون قيمة x المُقابِلة صحيحة. وهذا يتحقَّق عندما $y = 4$.

b) أكبر عدد من الغزلان هو 5

أتدرّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1 – 11) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند **(أتدرَّب وأحل المسائل)**، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند **(مهارات التفكير العليا)**، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 18).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 12, 14 كتاب التمارين: (1–8)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (12–15) كتاب التمارين: 9, 10
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (15–18) كتاب التمارين: 11

أتدرّب وأحلّ المسائل

أُمثِّل منطقة حَلِّ كلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية: (1–9)، أنظر ملحق الإجابات.

1) $x + 3y > 1$, $5x - y \le 2$

2) $-3x - 12y > -9$, $x + 4y \ge 5$

3) $x - 11y < 6$, $-2x + 22y > -12$

4) $3x + 5y \le 1$, $3x + 5y \le 3$

5) $2x - 7y > 2$, $2x - 7y \le 2$

6) $13x - y < 11$, $x + y \ge 0$

7) $9x - y < 2$, $x + 3y > -1$, $x - y > -3$

8) $5x - 5y < 2$, $2x - 2y > 1$, $x \ge y$

9) $x \le y$, $x - 5y < 6$, $10x - y > 3$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

10) **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين، ودينارًا واحدًا للأطفال، ويتَّسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر. إذا كانت x تُمثِّل عدد البالغين، و y تُمثِّل عدد الأطفال، فكم شخصًا من البالغين والأطفال قد يوجد على متن القارب، علمًا بأنَّ رَيْع بيع التذاكر أقل من 12 دينارًا؟ أنظر ملحق الإجابات.

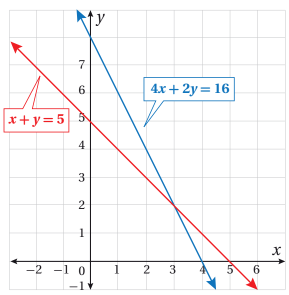
11) **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمّان والعقبة 25 دينارًا، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة 50 دينارًا. إذا كان رَيْع بيع التذاكر 1600 دينار على الأقل، وبيعت 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر المُمكِن لكل درجة. أنظر ملحق الإجابات.

12) أُظلِّل منطقة حَلِّ النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور، ثم أكتب جميع حلول النظام المُمكِنة، علمًا بأنَّ x و y عددان صحيحان موجبان:

$x + y \ge 5$

$4x + 2y \le 16$

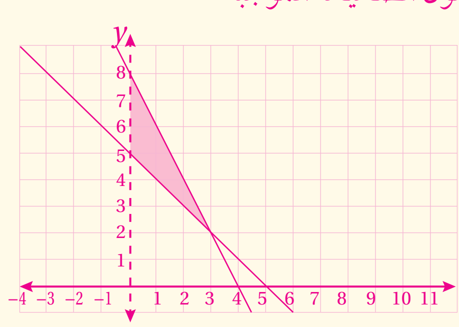
أنظر الهامش.



إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

12) $(1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (3,2)$

تُمثِّل الحلول الصحيحة الموجبة



13 **جامعات:** أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و1200 نقطة في الامتحانين معًا؛ شرط ألّا يقل المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألّا يقل المجموع في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة.
أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعيَّن على سامية إحرازها في كل امتحان لتُقبَل في الجامعة.

أنظر ملحق الإجابات.

14 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

15 **تبرير:** أصِف منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانيًّا:

$2x + y \leq 7$

$2x + y \geq 7$

الحل هو جميع النقاط الواقعة على المستقيم: $2x + y = 7$

مسألة مفتوحة: أكتب نظامين يتكوَّن كلٌّ منهما من متباينتين خطيتين بمتغيرين، بحيث تكون مجموعة الحَلِّ:

16 مجموعة حل إحدى المتباينتين.

$x + y \leq 1$

$x + y \leq -1$

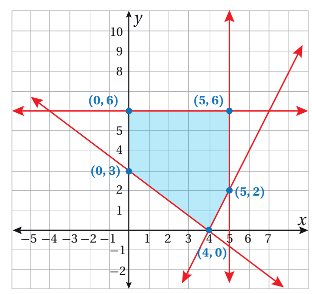
17 المجموعة الخالية.

$x + y < 0$

$x + y > 0$

18 **تحدٍّ:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حَلِّه هي المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني الآتي:

أنظر الهامش.



إرشادات:

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يوجد للمسألة المفتوحة عدد لانهائي من الإجابات.
- في السؤال 18 (تحدٍّ)، أُوجِّه الطلبة إلى إيجاد معادلة الخط المستقيم المارِّ بنقطتين معلومتين.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

18) معادلات المستقيمات الحدودية لهذه المنطقة هي:

$$x = 0,\ x = 5,\ y = 6,\ y = 2x - 8,\ y = -\frac{3}{4}x + 3$$

نظام المتباينات الذي منطقة حله هي المنطقة المظللة بالرسم هو:

$$x \geq 0,\ x \leq 5,\ y \leq 6.\ y \geq 2x - 8,\ y \geq -\frac{3}{4}x + 3$$

لأن النقطة (3, 2) الواقعة في منطقة الحلّ تحقق هذه المتباينات جميعها.

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - أكتب نظامًا من متباينتين خطيتين يكون حله:

1 خطًّا مستقيمًا.

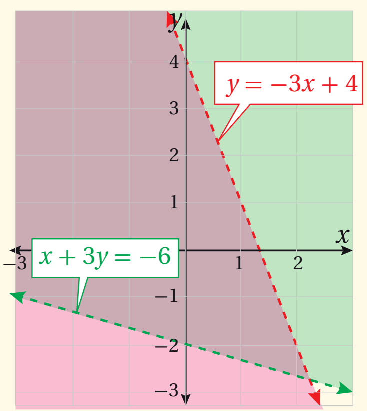
2 واقعًا في الربع الثالث.

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - أُمثِّل منطقة الحل لكلِّ نظام متباينات ممّا يأتي:

1 $y < -3x + 4$

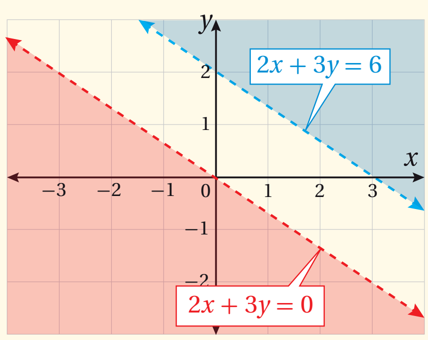
$x + 3y > -6$



منطقة الحل هي المنطقة التي تحوي مزيجًا من اللون الأخضر واللون الأحمر.

2 $2x + 3y \geq 6$

$2x + 3y \leq 0$



لا توجد منطقة حل لهذا النظام.

معمل برمجية جيوجبرا

هدف النشاط:

استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحل.

المصادر والأدوات:

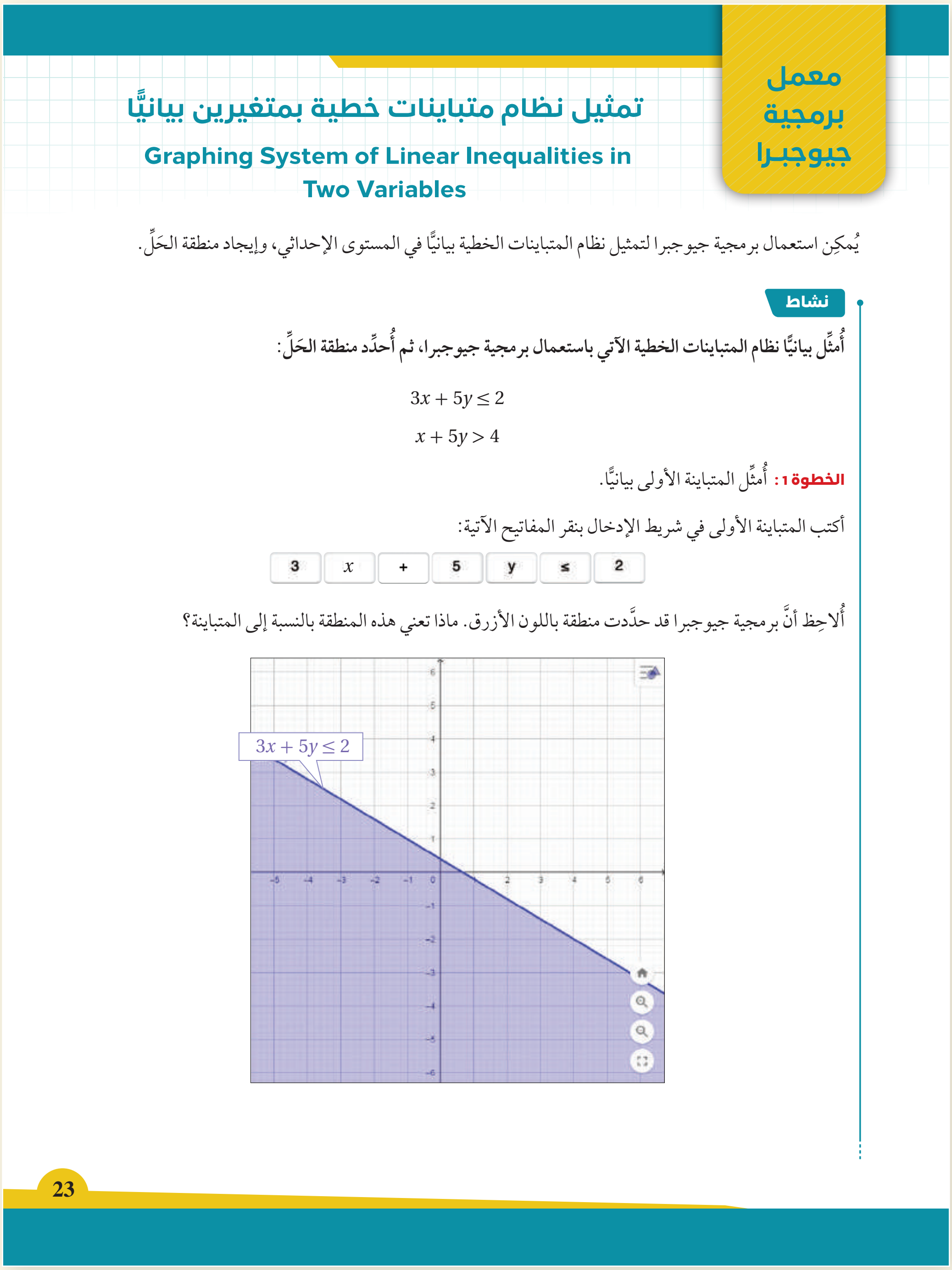
برمجية جيوجبرا.

خطوات العمل:

- أُرافِق الطلبة إلى مختبر الحاسوب، ثم أُجلِسهم في مجموعات صغيرة أمام أجهزة الحاسوب.
- أطلب إلى الطلبة فتح برمجية جيوجبرا من شبكة الإنترنت باستعمال الرابط الآتي:

https://www.geogebra.org/classic?lang=ar

- أُراجِع الطلبة في أبرز أوامر البرمجية، مثل: تمثيل المعادلات، وتمثيل نظام من المعادلات.
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ خطوات النشاط معًا، ثم أتجوَّل بينهم، مُقدِّمًا المساعدة لمَن يحتاج إليها.
- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الوارد في بند (**أتدرَّب**) واجبًا منزليًّا، مُؤكِّدًا لهم ضرورة استعمال خاصية طباعة الشاشة لحفظ أعمالهم، ثم عرضها عليَّ إلكترونيًّا أو مطبوعةً.



معمل برمجية جيوجبرا

تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Graphing System of Linear Inequalities in Two Variables

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحَلِّ.

نشاط

أُمثِّل بيانيًّا نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: أُمثِّل المتباينة الأولى بيانيًّا.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3 | x | + | 5 | y | ≤ | 2

ألاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟

23

الخطوة 2: أمثِّل المتباينة الثانية بيانيًّا.

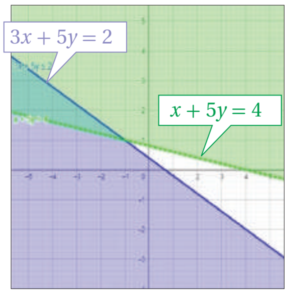
أكتب المتباينة الثانية في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

x	+	5	y	>	4

الخطوة 3: أغيِّر اللون.

ألاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة حَلٍّ كلٍّ من المتباينتين باللون الأزرق؛ لذا يجب تغيير لون منطقة الحَلِّ لإحدى المتباينتين، لتمييز منطقة حَلِّ كل متباينة بلون مختلف.

أنقر المتباينة المراد تغيير لونها على يسار الشاشة، ولتكن المتباينة الثانية، ثم أنقر الرمز ⋮ الذي بجانبها، وأختار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا آخر مثل الأخضر.



الخطوة 4: أُفسِّر المناطق الظاهرة.

ألاحِظ وجود أربع مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانية باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونين معًا، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كل منطقة؟

أتدرَّب

أُمثِّل بيانيًّا كُلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

(1–4)، أنظر الهامش.

1) $-5x - 2y \geq 3$
$x + y < -3$

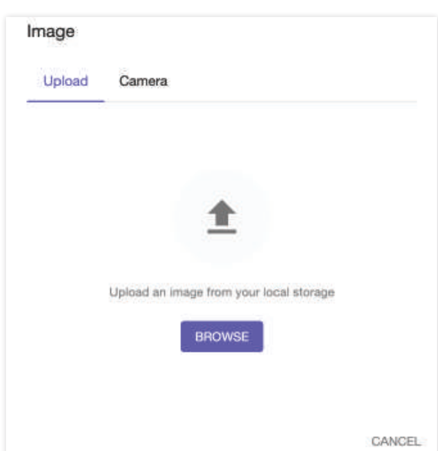
2) $0.5x + 7y > -2$
$x < y$

3) $x - y \geq 0$
$x + y \leq 0$

4) $9x - 6y > 8$
$27x - 18y < 1$

إرشاد:

يُمكِن التقاط الصورة مباشرة من دون تخزينها؛ إذ تظهر الشاشة الآتية عند الضغط على أيقونة Image، فيختار الطالب/ الطالبة استدعاء صورة محفوظة مسبقًا، أو التقاط صورة مباشرة بالضغط على Camera، ثم التقاط الصورة، ثم الضغط على ok.

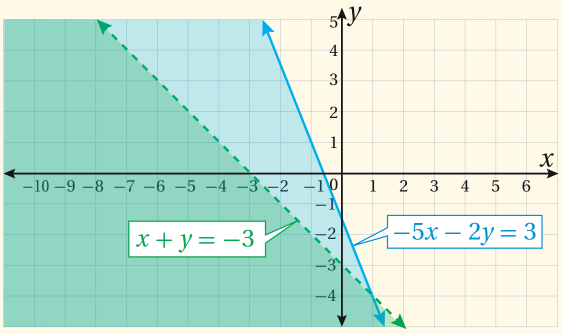


إرشاد:

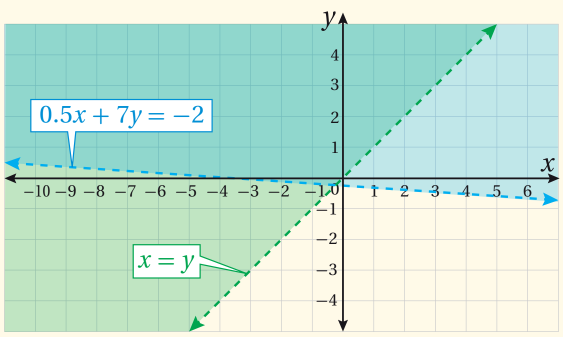
توفيرًا للوقت، يُمكِنني تثبيت نسخة من هذه البرمجية المجّانية في أجهزة الحاسوب قبل بدء الحصة.

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب):

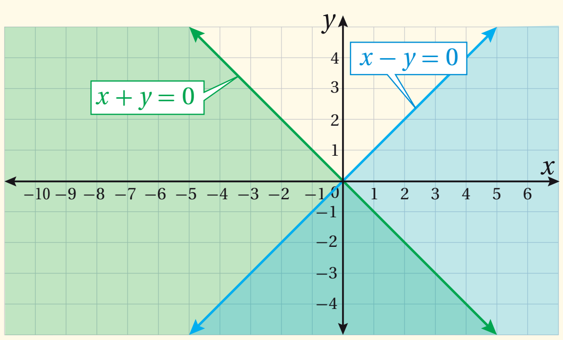
1)



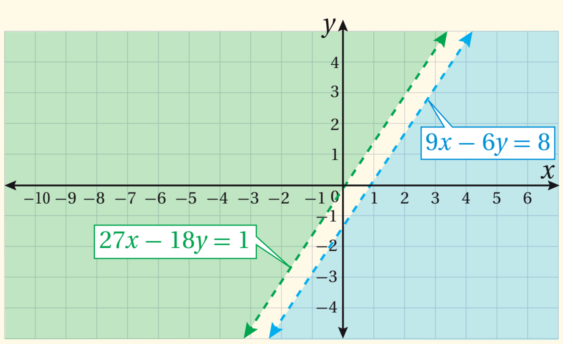
2)



3)



4)



الدرس 3

نتاجات الدرس

- نمذجة مواقف حياتية بمسائل يُمكِن حلها بالبرمجة الخطية.
- حل مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تمثيل منطقة الحل لنظام المتباينات الخطية.
- إيجاد قِيَم اقتران معطى عند نقاط مُعيَّنة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

الدرس 3

البرمجة الخطية

Linear Programming

فكرة الدرس نمذجة مواقف حياتية بمسألة يُمكِن حَلُّها باستعمال طريقة البرمجة الخطية بيانيًّا.

المصطلحات القيود، البرمجة الخطية، منطقة الحلول المُمكِنة، الاقتران الهدف، الحَلُّ الأمثل.

مسألة اليوم دخلت سلمى محلًّا لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 دنانير ثمنًا لـ 15شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المُعلَّقة داخل المحلِّ معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كَمٍّ مُمكِن من البندورة؟

نوع شتلة البندورة	A	B
الثمن بالدينار	0.2	0.3
أقل إنتاج مُتوقَّع	4 kg	5 kg

البرمجة الخطية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني في المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة مُمكِنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة مُمكِنة (قيمة صغرى) لاقتران يُسمّى **الاقتران الهدف** (objective function)، ضمن مجموعة **قيود** (constraints)، يُمثِّل كلٌّ منها متباينة خطية. فبتمثيل المتباينات الخطية (القيود) تتحدَّد منطقة حَلٍّ مشتركة لها تُسمّى **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible region)، وفيها تتحقَّق أكبر قيمة مُمكِنة، أو أصغر قيمة مُمكِنة للاقتران الهدف عند رؤوس المُضلَّع الذي يُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تُعرَّف البرمجة الخطية أيضًا بأنَّها طريقة البحث عن **الحَلِّ الأمثل** (optimal solution)، وتتكوَّن مسألتها ممّا يأتي:

1. **الاقتران الهدف:** يكون في صورة: $P = ax + by$، حيث:
   P: اسم الاقتران (مثل الربح).
   a, b: عددان حقيقيان. x, y: متغيران.
2. **القيود:** نظام من المتباينات الخطية، وهي تُكتَب بدلالة المتغيرين x, y، وتُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.

25

1 التهيئة

- أكتب اقترانًا تربيعيًّا بسيطًا على اللوح، مثل: $f(x) = x^2$، ثم أسأل الطلبة:
  - ما المقصود بمجال الاقتران؟ إجابة مُحتمَلة: مجموعة مدخلات الاقتران.
  - ما مجال الاقتران المعطى؟ مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أُوضِّح للطلبة إمكانية تحديد مجال معطى للمسألة بحسب ما يقتضيه المثال. فمثلًا، إذا كان الاقتران: $f(x) = x^2$ يُمثِّل مساحة المربع الذي طول ضلعه x، فإنَّ مجال الاقتران يكون $(0, \infty)$.
- أُمثِّل الاقتران بيانيًّا على فترة مُحدَّدة، ثم أُوضِّح للطلبة معنى أنْ يكون للاقتران قيمة عظمى أو قيمة صغرى على تلك الفترة.
- أُوضِّح للطلبة أهمية إيجاد القِيَم العظمى أو القِيَم الصغرى لاقتران معطى؛ إذ تدخل هذه الحسابات في كثير من تطبيقات الحياة العملية، مثل: إيجاد أكبر ربح، وإيجاد أقل تكلفة، وإيجاد أقصر مسافة، وإيجاد أقل زمن.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - كم شتلة بندورة ترغب سلمى في شرائها؟ عدد من الشتلات لا يزيد على 15 شتلة.
  - ما المبلغ الذي حدَّدته سلمى ثمنًا لشتلات البندورة؟ مبلغ لا يزيد على 4 دنانير.
  - ما الذي يراد إيجاد أكبر قيمة له في هذه المسألة؟ عدد شتلات البندورة من كل نوع للحصول على أكبر كَمٍّ من البندورة.
  - كيف يُمكِن إيجاد عدد شتلات البندورة التي ستشتريها سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كَمٍّ مُمكِن من البندورة؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُعرِّف للطلبة البرمجة الخطية بأنَّها طريقة منظمة تعتمد على حل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا، وتُمثِّل هذه المتباينات قيودًا معطاةً لمسألة حياتية؛ بُغْيَةَ إيجاد أكبر قيمة لاقتران خطي أو أقل قيمة له، في ما يُسمّى اقتران الهدف.
- أُوضِّح للطلبة معنى كلٍّ من الاقتران الهدف، والقيود، ومفهوم منطقة الحلول المُمكِنة، إضافةً إلى تعريف (الحل الأمثل) لمسألة البرمجة الخطية.
- أُناقِش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (مفهوم أساسي)، وبيِّنت أنَّ النقاط التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكِن أو أصغر ما يُمكِن، في مسائل البرمجة الخطية، هي بالضرورة نقاط تُمثِّل رؤوسًا لمنطقة حل نظام المتباينات الخطية التي تُعبِّر عن قيود المسألة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن حل مسائل البرمجة الخطية باتباع الخطوات الآتية:

1. صياغة الفرضيات، وكتابة اقتران الهدف الذي يراد إيجاد قيمته العظمى أو قيمته الصغرى، ثم تحديد القيود.
2. تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتظليل منطقة الحلول المُمكِنة.
3. تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة، وتعويضها في اقتران الهدف.
4. اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى تبعًا لِما هو مطلوب في المسألة.

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح؛ مُؤكِّدًا ضرورة اتباع الخطوات الواردة في المثال أثناء الحل.

إرشادات:

- أخبِر الطلبة أنَّه يَسْهُل استعمال هذه الطريقة البيانية لمسائل البرمجة الخطية بمُتغيِّرين، وأنَّ المسائل التي تحوي عددًا أكبرَ من المُتغيِّرات تتطلَّب استعمال طرائق أخرى لم يَرِدْ ذكرها في الكتاب المدرسي.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد نقطة داخل منطقة الحل (من غير الرؤوس)، ثم تعويضها في اقتران الهدف، مُبيِّنًا لهم أنَّه يتعذَّر الحصول على قيمة أكبر من القيمة 7.
- أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مفهوم أساسي

إذا وُجِدت قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنَّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

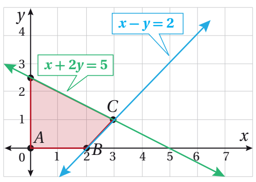
مثال 1

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $P = 2x + y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \leq 5$$
$$x - y \leq 2$$
$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

الخطوة 1: أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية (القيود) بيانيًّا، ثم أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُعيِّن إحداثيي كلٍّ من نقاط رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة، وهي: A, B, C, D، ثم أضعها في جدول أحسب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلٍّ منها.

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$P = 2x + y$
$A(0, 0)$	$P = 2(0) + 0 = 0$
$B(2, 0)$	$P = 2(2) + 0 = 4$
$C(3, 1)$	$P = 2(3) + 1 = 7$
$D(0, 2.5)$	$P = 2(0) + 2.5 = 2.5$

الخطوة 3: أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحِظ أنَّ أكبر قيمة للاقتران P هي 7، وأنَّها تتحقَّق عندما $x = 3, y = 1$.

أتحقَّق من فهمي

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $Q = 50x + 40y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

أكبر قيمة هي $Q = 340$ عند النقطة $(2, 6)$.

$$x + y \leq 8$$
$$2x + y \leq 10$$
$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتذكَّر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.

أتعلَّم

تُسمّى المتباينتان $x \geq 0\ , y \geq 0$ قيود (أو شروط) عدم السالبية، وهما توجدان في مسائل البرمجة الخطية الحياتية بصورة ضمنية.

يُمكِن حَلُّ المسائل الحياتية التي تتضمَّن إيجاد أكبر ربح مُمكِن بطريقة البرمجة الخطية، واتباع خطوات تُشبِه الخطوات الواردة في المثال 1. ولكنْ يتعيَّن قبل ذلك تحديد متغيرين، مثل x, y، وكتابة نظام متباينات خطية بدلالة كلٍّ منهما لتمثيل قيود المسألة، وكتابة اقتران الربح بدلالتيهما أيضًا.

مثال 2 : من الحياة

يمتلك مُزارِع 50 دونمًا من الأرض، ويريد تهيئة التربة في جزء منها لزراعتها بالذرة، أو بالقمح، أو بكليهما كما في الجدول المجاور.

	الذرة	القمح
تكلفة تهيئة التربة لكل دونم	JD 60	JD 30
عدد أيام العمل في كل دونم	3 أيام	4 أيام
الربح المُتوقَّع من كل دونم	JD 180	JD 100

غير أنَّ المُزارِع لا يُمكِنه إنفاق أكثر من JD 1800 على ذلك، ويتعيَّن عليه تهيئة التربة وزراعتها في 120 يومًا على الأكثر قبل بدء موسم الأمطار. كم دونمًا سيزرع من كل محصول لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

الخطوة 1: أصوغ الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الدونمات التي ستُزرَع ذرةً هو x، وأنَّ عدد الدونمات التي ستُزرَع قمحًا هو y.

إذا افترضْتُ أنَّ المُزارِع سيبيع كل إنتاجه من المحصولين، فإنَّ الربح المُتوقَّع هو:

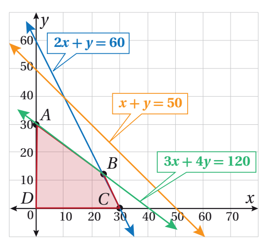
$$P = 180x + 100y$$

يريد المُزارِع أنْ يكون الربح أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 50\ ,\ 60x + 30y \leq 1800\ ,\ 3x + 4y \leq 120\ ,\ x \geq 0\ , y \geq 0$$

الخطوة 2: أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية، ثم أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



أتذكَّر

لإيجاد إحداثيي النقطة B، أحُلُّ المعادلتين معًا بطريقة الحذف والتعويض، ويُمكِنني أيضًا استعمال برمجية جيوجبرا لإيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

مثال 2 : من الحياة

- أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ مسائل البرمجة الخطية تُمثِّل مسائل عملية تنتج من تطبيقات يومية، وأنَّ حل هذه المسائل الحياتية يتطلَّب أوَّلًا تحديد مُتغيِّرات مناسبة، واقتران هدف مناسب، وقيود مناسبة. أمّا العملية التي تُستعمَل لترجمة المسألة الحياتية إلى مسألة رياضية فتُسمّى النمذجة الرياضية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 2.
- أطلب إلى الطلبة اقتراح المُتغيِّرات التي تُمثِّل المسألة، ثم صياغة الفرضيات، لافتًا انتباههم إلى أنَّ العدد 50 يُمثِّل الحد الأعلى لعدد الدونمات المزروعة؛ أيْ إنَّ عدد الدونمات يجب أنْ يكون أقل من أو يساوي 50، وهو ما يُمثِّل قيدًا من قيود المسألة. وكذلك الحال بالنسبة إلى العدد 1800، والعدد 120.
- أُناقِش الطلبة في حل هذا المثال على اللوح، مُقدِّمًا لهم التغذية الراجعة اللازمة أثناء ذلك.

إرشادات:

- أُبيِّن للطلبة أنَّ كتابة المتباينات في أبسط صورة تُسهِّل عملية تمثيلها بيانيًّا.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن إيجاد إحداثيات النقطة جبريًّا بحل المعادلتين المُكوِّنتين للنقطة بالحذف أو التعويض.

الخطوة 3 : أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D، ثم أجد قيمة الربح P عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$P = 180x + 100y$
$A(0, 30)$	$P = 180(0) + 100(30) = 3000$
$B(24, 12)$	$P = 180(24) + 100(12) = 5520$
$C(30, 0)$	$P = 180(30) + 100(0) = 5400$
$D(0, 0)$	$P = 180(0) + 100(0) = 0$

الخطوة 4 : أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحِظ من الجدول أنَّ أكبر ربح مُمكِن هو 5520 دينارًا، وأنَّه يتحقَّق عند زراعة 24 دونمًا بالذرة، و12 دونمًا بالقمح.

يُعَدُّ مناخ الأردن مناسبًا لزراعة القمح، لكنَّ الزحف العمراني نحو الأراضي الزراعية قلَّص مساحات كثير من السهول ذات التربة الخصبة.

أتحقَّق من فهمي

يُنتِج مشغل للصناعات اليدوية معاطف وحقائب جلدية، ويتوافر لديه أسبوعيًّا $40\ m^2$ على الأكثر من الجلد الخام. يتطلَّب صنع المعطف الواحد استعمال $2\ m^2$ من الجلد الخام، ويستغرق ذلك ساعتي عمل، ويُحقِّق ربحًا مقداره 5 دنانير، ويتطلَّب صنع الحقيبة الواحدة استعمال $1\ m^2$ من الجلد الخام، ويستغرق ذلك 3 ساعات عمل، ويُحقِّق ربحًا مقداره 4 دنانير.

إذا كان عدد ساعات العمل في المشغل لا يزيد على 60 ساعة أسبوعيًّا، فما عدد كلٍّ من المعاطف والحقائب التي يتعيَّن صنعها أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟ (أفترض أنَّ المشغل يبيع إنتاجه كاملًا). أنظر الهامش.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

ألاحِظ من المثالين السابقين أنَّ منطقة الحلول المُمكِنة التي تُحدِّدها القيود كانت مغلقة؛ لأنَّ هذه القيود فرضت ذلك، ولكنَّ بعض المسائل الحياتية تتضمَّن إيجاد أقل تكلفة مُمكِنة، أو أقل كمية مُستهلَكة، وغير ذلك، فتكون منطقة الحلول عندئذٍ مفتوحة؛ لأنَّ قيودها تفرض ذلك.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 2):

x: عدد المعاطف، y: عدد الحقائب.

المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتران.

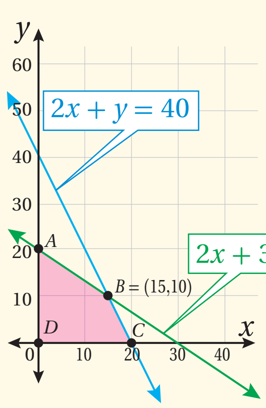
$P = 5x + 4y$

تحت القيود:

$2x + y \leq 40$

$2x + 3y \leq 60$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$



رؤوس منطقة الحل	$P = 5x + 4y$
$(0, 0)$	$P = 0$
$(0, 20)$	$P = 5(0) + 4(20) = 80$
$(15, 10)$	$P = 5(15) + 4(10) = 115$
$(20, 0)$	$P = 5(20) + 4(0) = 100$

أكبر ربح مُمكِن هو 115 دينارًا، وذلك بإنتاج 15 معطفًا و10 حقائب وبيعها أسبوعيًّا.

مثال 3 : من الحياة

	النوع A	النوع B
تكلفة الكيس الواحد	JD 10	JD 12
عدد وحدات البروتينات	40	30
عدد وحدات المعادن	20	20
عدد وحدات الفيتامينات	10	30

يخلط بعض مُربّي الماشية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقل. ويُبيِّن الجدول المجاور تكلفة الكيس الواحد من كل نوع، وعدد الوحدات التي يحويها من البروتينات والمعادن والفيتامينات. إذا احتاجت الماشية يوميًّا إلى 150 وحدة من البروتينات، و90 وحدة من المعادن، و60 وحدة من الفيتامينات على الأقل، فكم كيسًا من النوع A والنوع B معًا يُمكِن أنْ تستهلكه الماشية بأقل تكلفة مُمكِنة؟

يعتمد تسمين الماشية على تغذيتها بخليط مُعَدٍّ بنسب مُحدَّدة من الحبوب (مثل: الذرة الصفراء، والشعير)، والتبن، وقشور الفول، وملح الطعام، والفيتامينات.

الخطوة 1: أصوغ الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الأكياس من النوع A هو x، وأنَّ عدد الأكياس من النوع B هو y.

إذا افترضْتُ أنَّ هذه الماشية تستهلك كل ما يُقدَّم لها من النوعين يوميًّا، فإنَّ التكلفة C هي:

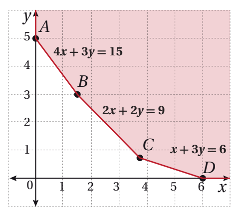
$$T = 10x + 12y$$

المطلوب أنْ تكون التكلفة أقل ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$40x + 30y \geq 150\ ,\ 20x + 20y \geq 90\ ,\ 10x + 30y \geq 60\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

الخطوة 2: أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية، ثم أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 3: أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D، ثم أجد قيمة التكلفة T عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$T = 10x + 12y$
$A(0, 5)$	$T = 10(0) + 12(5) = 60$
$B(1.5, 3)$	$T = 10(1.5) + 12(3) = 51$
$C(3.75, 0.75)$	$T = 10(3.75) + 12(0.75) = 46.5$
$D(6, 0)$	$T = 10(6) + 12(0) = 60$

إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

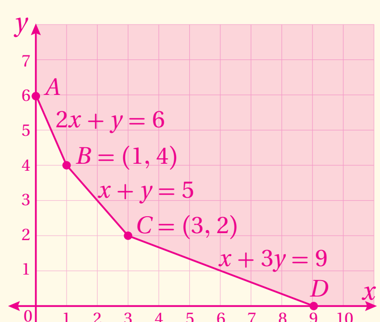
x: عدد العلب من النوع الأوَّل، y: عدد العلب من النوع الثاني.

المطلوب: إيجاد أصغر قيمة للاقتران.

$$C = 0.25x + 0.3y$$

تحت القيود:

$$60x + 60y \geq 300$$
$$12x + 6y \geq 36$$
$$10x + 30y \geq 90$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$



رؤوس منطقة الحل	$C = 0.25x + 0.3y$
$(0, 6)$	$C = 0+0.3(6) = 1.8$
$(1, 4)$	$C = 0.25(1) + 0.3(4) = 1.45$
$(3, 2)$	$C = 0.25(3) + 0.3(2) = 1.35$
$(9, 0)$	$C = 0.25(9) + 0.3(0) = 2.25$

أقل تكلفة مُمكِنة هي 1.35 من الدينار، وذلك عند استهلاك 3 علب من النوع الأوَّل وعلبتين من النوع الثاني يوميًّا.

مثال 3 : من الحياة

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3.
- أطلب إلى الطلبة اقتراح المُتغيِّرات التي تُمثِّل المسألة، ثم صياغة الفرضيات.
- أُوضِّح للطلبة كيف أنَّ هذه المنطقة تختلف عن منطقتي الحل في المثالين السابقين؛ إذ إنَّ منطقة الحل في هذا المثال غير محدودة.
- أحل هذا المثال بإيجاد رؤوس المضلع، ثم تعويضها في اقتران الهدف، مُؤكِّدًا للطلبة صحَّة المفهوم الأساسي حتى لو كانت المنطقة غير محدودة.

إرشادات:

- أُبيِّن للطلبة أنَّه من غير المنطقي في هذا المثال البحث عن أكبر قيمة لاقتران الهدف؛ ذلك أنَّ المطلوب دائمًا هو البحث عن أقل تكلفة، وليس من المعقول البحث عن أكبر تكلفة.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يتعذَّر إيجاد أكبر قيمة لاقتران الهدف في هذا المثال؛ نظرًا إلى تزايد قِيَم اقتران الهدف بصورة غير محدودة، مثل تعويض النقاط $(0, y)$ لقِيَم كبيرة للمُتغيِّر y.

تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبريًّا بنظام من المتباينات الخطية؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة قراءة المسألة بِرَوِيَّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسـائل)، ثم أطلب إليهم حل المسـائل (1–6) ضمن مجموعات ثنائية داخـل الغرفة الصفية؛ فهذه المسـائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُسـتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسـها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنبيه: أَلفِت انتبـاه الطلبة إلى أنَّه إذا وُجِدت نقطة خارج منطقة الحل تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكِن، فإنَّه لا يُمكِن الأخذ بها؛ إذ إنَّها لا تُحقِّق قيود المسألة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المسـتوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسـائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهـم مع طالب آخـر/ طالبة أخرى من ذوي المسـتوى المتوسـط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّـه الطلبـة إلـى بنـد (**مهـارات التفكير العليـا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (10–12).

إرشـاد: في السؤال 10 (**تبرير**)، أُؤكِّد للطلبة مـا ذُكِر آنفًا مــن أنَّ أكبر قيمة أو أقـل قيمة لاقتران الهدف في مسائل البرمجة الخطية قد تتحقَّق عند أكثر من نقطة من نقاط الحل.

الخطوة 4 : أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ مـن الجدول أنَّ أقل تكلفـة مُمكِنة هي 46.5 دينارًا، وأنَّ الماشـية تسـتهلك وقتئذٍ 3.75 أكيـاس من العلف A، و0.75 كيس من العلف B، لتلبيـة الحد الأدنى الذي يَلزمها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

أفادت بعض الدراسات أنَّ جسم الإنسـان يحتاج إلى نحو 2000 سـعر حراري يوميًّـا، وأنَّ ذلك يختلف من شـخص إلى آخر تبعًا لعمر الشـخص، وكتلته، ونوع الأنشـطة والتمارين التي يمارسها.

أتحقَّق من فهمي

حمية غذائية: يشـترط نظام للحمية الغذائيـة توافر ما لا يقـل عن 300 سـعرة حراريـة، و36 وحـدة من فيتامين A، و90 وحـدة من فيتامين C، ضمن الجزء السـائل من الوجبة الغذائية. يُبيِّـن الجدول أعلاه تكلفة العلبـة الواحدة من نوعين مختلفين مـن الألبان، وعدد السـعرات الحرارية، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يُمكِن أنْ يسـتهلكها يوميًّا شـخص يتَّبِع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية مُمكِنة؟ أنظر الهامش.

	النوع 1	النوع 2
سعر العلبة الواحدة	JD 0.25	JD 0.3
عدد السعرات الحرارية	60	60
عدد وحدات فيتامين A	12	6
عدد وحدات فيتامين C	10	30

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P = 4x + 3y$
$x + 2y \le 4$
$x - y \le 1$
$x \ge 0 , y \ge 0$
أكبر قيمة هي $P = 11$ عند النقطة $(2, 1)$.

2) $R = 10x + 7y$
$0 \le x \le 60$
$0 \le y \le 60$
$5x + 6y \le 420$
أكبر قيمة هي $R = 740$ عند النقطة $(60, 20)$.

3) $Z = 1.5x + y$
$x + 3y \le 15$
$4x + y \le 16$
$x \ge 0 , y \ge 0$
أكبر قيمة هي $Z = 8.5$ عند النقطة $(3, 4)$.

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

4) $Q = 4x + 5y$
$x + y \ge 8$
$3x + 5y \ge 30$
$x \ge 0 , y \ge 0$
أصغر قيمة هي $Q = 35$ عند النقطة $(5, 3)$.

5) $C = 8x + 4y$
$x + 2y \ge 4$
$3x + y \ge 7$
$2y - x \ge 7$
$x \ge 0 , y \ge 0$

6) $K = 25x + 35y$
$8x + 9y \le 7200$
$8x + 9y \ge 3600$
$x \ge 0 , y \ge 0$
أصغر قيمة هي $K = 11250$ عند النقطة $(450, 0)$.

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

5) أصغر قيمة هي $C = 24$ عند النقطة $(1, 4)$.

30

الواجب المنزلي:

أسـتعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 7, 9 كتاب التمارين: 1, 2
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (7–9) كتاب التمارين: 3
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (10–12) كتاب التمارين: 4

إرشـاد: : قد يختلف تصنيف الطلبة من درس إلى آخر تبعًا لأدائهم. فمثلًا، قد يكـون أداء أحد الطلبة دون المتوسط في درس، وفوق المتوسط في درس آخر.

7 **صناعات:** يُنتِج أحد المصانع شوكولاتة مُغطّاة بالفستق، ويجني ربحًا مقداره JD 1.5 عن كل علبة مَبيعة، ويُنتِج نوعًا آخر منها مُغطّى بالبندق، ويجني ربحًا مقداره JD 2 عن كل علبة مَبيعة. وقد بيَّنت دراسة أجراها قسم التسويق في المصنع بهدف زيادة الربح أنَّ إنتاج كلا النوعين من الشوكولاتة يجب ألّا يزيد على 1200 علبة شهريًّا، وأنَّ الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق لا يزيد على نصف الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق، وأنَّ عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق يجب أنْ يكون أقل من (أو يساوي) 600 علبة، مضافًا إليها ثلاثة أمثال عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق شهريًّا. كم علبة شوكولاتة من كل نوع يجب أنْ يُنتِج المصنع شهريًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، مُفترِضًا بيع الإنتاج كاملًا كل شهر؟ أنظر ملحق الإجابات.

8 **دعاية:** أراد صلاح طباعة كُتيِّبات ونشرات دعائية لتسويق مُنتَجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكُتيِّب الواحد 3 صفحات، وتحوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكُتيِّب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرَّر صلاح أنَّه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة، مُمثَّلةً في 50 كُتيِّبًا على الأقل، و150 نشرة على الأقل. كم كُتيِّبًا ونشرةً يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يُمكِن؟

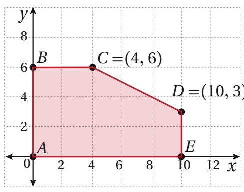
أقل تكلفة مُمكِنة هي 25 دينارًا، وذلك عند طباعة 50 كُتيِّبًا و 150 نشرة.

9 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

أكبر إنتاج هو 70 kg ، وذلك عند شراء 5 شتلات من النوع A و 10 شتلات من النوع B.

مهارات التفكير العليا

10 **تبرير:** يتحقَّق أحيانًا أكبر ربح مُمكِن عند نقطتين من رؤوس منطقة الحَلِّ. وفي هذه الحالة يُمكِن إيجاد نقاط أُخرى لتحقيق أكبر ربح عندها، بالرغم من أنَّ قيمة الربح وحيدة. أجد أكبر قيمة مُمكِنة للربح $P = x + 2y$ ضمن منطقة الحلول المُمكِنة المُمثَّلة في الشكل المجاور، مُبرِّرًا إجابتي، ثم أجد نقاطًا أُخرى ضمن منطقة الحَلِّ يتحقَّق عندها أكبر قيمة مُمكِنة للربح.



أنظر ملحق الإجابات.

11 **تحدٍّ:** أجد اقتران هدف صورته: $G = ax + by$، حيث a, b عددان حقيقيان، وله أكبر قيمة عند النقطة $(2, 3)$، وهي 18، ضمن القيود المجاورة:

$$x + 2y \le 8$$
$$x + y \le 5$$
$$x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

ستختلف إجابات الطلبة. إجابة مُحتمَلة: $G = \frac{9}{4}x + \frac{9}{2}y$

12 **تحدٍّ:** أجد مجموعة قِيَم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي تجعل للاقتران الهدف:

$$D = 3x + ny$$

أكبر قيمة مُمكِنة عند النقطة $(3, 4)$، ضمن القيود المجاورة:

$$x + 3y \le 15$$
$$4x + y \le 16$$
$$x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

$1 \le n \le 9$

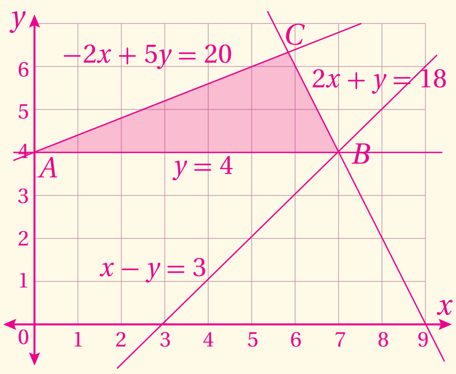
5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للاقتران: $T = -3x + 5y$ ضمن القيود المعطاة في ما يأتي:

$$y \ge 4$$
$$-2x + 5y \le 20$$
$$-7x + 5y \le 35$$
$$x - y \le 3$$
$$2x + y \le 18$$

التمثيل البياني للمتباينات مُبيَّن في الشكل التالي.

القيمة العظمى هي 20، والقيمة الصغرى هي -1



6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - تُخطِّط مدرسة ثانوية أنْ تأخذ ما لا يقل عن 400 طالب في رحلة إلى مدينة البترا، وقد استأجرت لذلك حافلات من شركة نقل لديها 10 حافلات كبيرة، سعة الواحدة منها 50 راكبًا، و8 حافلات صغيرة، سعة الواحدة منها 40 راكبًا، علمًا بأنَّ لدى الشركة 9 سائقين فقط. إذا كانت أجرة الحافلة الكبيرة JD 560، وأجرة الحافلة الصغيرة JD 420، فما أقل تكلفة مُمكِنة لاستئجار الحافلات لهذه الرحلة؟

أفترض أنَّ عدد الحافلات الكبيرة المستأجرة لنقل الطلبة هو x، وعدد الحافلات الصغيرة هو y.

تكلفة استئجار هذه الحافلات هي: $C = 560x + 420y$

عدد رُكّاب هذه الحافلات 400 طالب على الأقل ⟵ $50x+40y \ge 400$

بالقسمة على 10: $5x + 4y \ge 40$

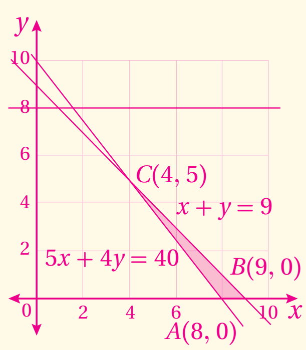
عدد السائقين 9 ⟵ $x + y \le 9$

عدد الحافلات الكبيرة لدى الشركة 10 ⟵ $0 \le x \le 10$

عدد الحافلات الصغيرة لدى الشركة 8 ⟵ $0 \le y \le 8$

يُبيِّن الرسم المجاور التمثيل البياني لنظام المتباينات السابقة. أجد إحداثيي C بحل المعادلتين: $x+y = 9,\ 5x + 4y = 40$

إحداثيا C هما: $(4, 5)$.



رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$C = 560x + 420y$
$A(8, 0)$	$560(8)+420(0) = 4480$
$B(9, 0)$	$560(9)+420(0) = 5040$
$C(4, 5)$	$560(4)+420(5) = 4340$

إذن، أقل تكلفة لاستئجار الحافلات لهذه الرحلة هي 4340 دينارًا في حال استئجار 4 حافلات كبيرة، و5 حافلات صغيرة.

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1–4) فرديًّا، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُناقِشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (5–13)، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُحدِّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

إرشادات:

- أُذكِّر الطلبة بمفهوم الزوج المُرتَّب الذي يُمثِّل حلًّا لمتباينة، أو يُمثِّل حلًّا لنظام من المتباينات، قبل البدء بحل الأسئلة (1–4).
- أُذكِّر الطلبة بأنَّ كتابة المتباينات في أبسط صورة تُسهِّل عملية تمثيلها بيانيًّا.

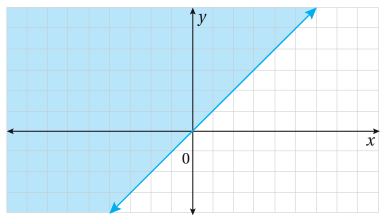
اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) الزوج الذي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $7y-8x>-10$ هو:

a) $(3, 2)$ b) $(3, 1)$ c) $(-4, -7)$ d) $(2, 5)$

2) المتباينة التي لها التمثيل البياني الآتي هي:



a) $x-y\leq 0$ b) $x-y\geq 0$ c) $x+y\leq 0$ d) $x+y\geq 0$

3) المتباينة التي يكون الزوج المُرتَّب $(1, 2)$ حَلًّا لها هي:

a) $2x+7y<2$ b) $x-11y\geq -2$ c) $y-13x\leq -6$ d) $2y-x>9$

4) الزوج الذي يُمثِّل حَلًّا لنظام المتباينات الآتي هو:

$$y+5x<7$$
$$2x-y\geq -3$$

a) $(3, 2)$ b) $(0, 0)$ c) $(-4, -2)$ d) $(2, 8)$

(5–6)، أنظر ملحق الإجابات.

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

5) $x-8y\leq 9$
$4x+7y>3$

6) $12x+10y>1$
$-5x-8y<2$
$3x+y\geq -6$

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المُتدرِّبات x، وعدد الطلاب المُتدرِّبين y، ولا يقل العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقل عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

(7–8)، أنظر الهامش.

7) أشرح بالكلمات معنى: $2y\geq x$.

8) إذا كان عدد الطالبات المُتدرِّبات 6، فما العدد المُمكِن للطلاب المُتدرِّبين؟

9) أجد جميع الحلول المُمكِنة لنظام المتباينات الآتي، حيث m و n عددان صحيحان موجبان:

$$m+n>4$$
$$3m+7n\leq 21$$

أنظر ملحق الإجابات.

10) أجد أكبر قيمة للاقتران: $P=4x+y$، ضمن القيود الآتية:

$$x+y\leq 50$$
$$3x+y\leq 90$$
$$x\geq 0,\ y\geq 0$$

أكبر قيمة هي $P=120$ عند النقطة $(30, 0)$.

11) أجد أصغر قيمة للاقتران: $C=200x+500y$، ضمن القيود الآتية:

$$x+2y\geq 10$$
$$3x+4y\leq 24$$
$$x\geq 0,\ y\geq 0$$

أصغر قيمة هي $C=2300$ عند النقطة $(4, 3)$.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

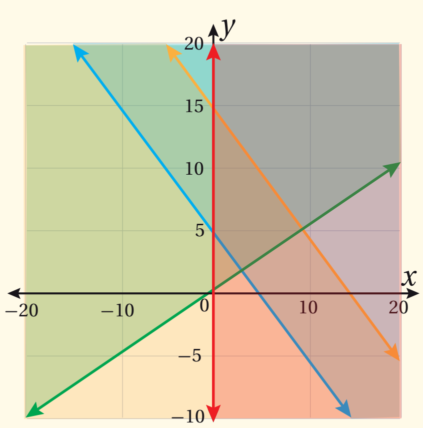
7) عدد الطالبات أقل أو يساوي ضعف عدد الطلاب.

8) أفترض أنَّ عدد الطالبات هو x، وأنَّ عدد الطلاب هو y.

بكتابة نظام المتباينات الذي

$$x+y\geq 5$$
$$x+y\leq 15$$
$$y\geq 0.5x,\ x\geq 0,\ y\geq 0$$

بتمثيل النظام بيانيًّا:



ألاحِظ من التمثيل البياني أنَّه إذا كان عدد الطالبات 6، فقد يتراوح عدد الطلاب بين 3 طلبة و 9 طلبة.

الوحدة 1

تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند (**تدريب على الاختبارات الدولية**) فرديًّا، ثم أُناقِشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبيِّنًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.

اختبار نهاية الوحدة

12 يُنتِج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآلتين A و B معًا. ويُبيِّن الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلٍّ من الآلتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كل نوع يجب أنْ يُنتِج المصنع يوميًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

	القطعة من النوع الأول	القطعة من النوع الثاني
زمن المعالجة في الآلة A	2 h	1 h
زمن المعالجة في الآلة B	1 h	1 h
مقدار الربح	JD 10	JD 15

أنظر الهامش.

13 أراد خبير تغذية إعداد خليط غذائي باستعمال الطحين العادي وطحين الشوفان، بحيث يحتوي الخليط على 12 وحدة على الأقل من فيتامين A، و10 وحدات على الأقل من فيتامين B، و6 وحدات على الأقل من فيتامين C.

يُبيِّن الجدول الآتي وحدات الفيتامين في نوعي الطحين، وسعر كل نوع:

	طحين الشوفان	الطحين العادي
السعر	JD 0.8 / kg	JD 0.5 / kg
فيتامين A	4 وحدات لكل كيلوغرام.	3 وحدات لكل كيلوغرام.
فيتامين B	وحدتان لكل كيلوغرام.	5 وحدات لكل كيلوغرام.
فيتامين C	3 وحدات لكل كيلوغرام.	وحدة لكل كيلوغرام.

كم كيلوغرامًا من نوعي الطحين يتعيَّن على خبير التغذية خلطه بحيث يحوي الخليط الحد الأدنى المطلوب من كل فيتامين وبأقل تكلفة؟ أنظر ملحق الإجابات.

تدريب على الاختبارات الدولية

14 إذا كان $y > 4$، فـأيٌّ ممّا يأتي يجب وضعه في المربع لتكون $\frac{3y+2}{5} \square y$ صحيحة:

a) $>$ b) $<$

c) $\leq$ d) $\geq$

15 إذا كان $x < y < 0$، فأيٌّ ممّا يأتي صحيحة دائمًا:

a) $xy^2 < x$ b) $xy < y^2$

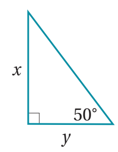
c) $xy < x^2$ d) $y - 1 < x$

16 إذا كان $a < b < c$ ثلاثة أعداد فردية صحيحة متتالية، وكان $x = a + b + 1$، وكان $y = b+c-1$، فإنَّ:

a) $x > y$ b) $x < y$

c) $x = y$ d) $2x = y$

17 أيٌّ ممّا يأتي صحيح اعتمادًا على المثلث المجاور:



a) $x > y$ b) $x < y$

c) $x = y$ d) $2x = y$

18 إذا كان $k < n < 0$ ، فأيٌّ ممّا يأتي ناتجه عدد موجب:

a) $k - n$ b) kn

c) k^2n d) $k^2n + kn^2$

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

12) x: عدد القطع من النوع الأوَّل، y: عدد القطع من النوع الثاني.

المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتران.

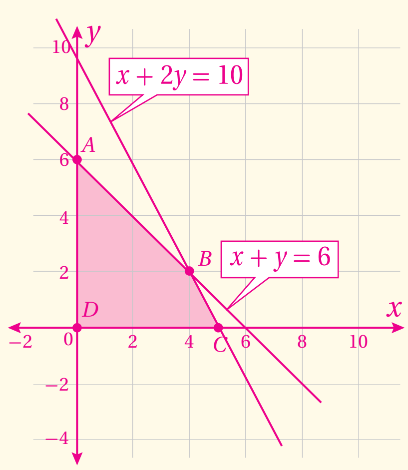
$P = 10x + 15y$

تحت القيود:

$2x + y \leq 10$

$x + y \leq 6$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$



رؤوس منطقة الحل	$P = 10x + 15y$
$A(0, 6)$	$P = 0 + 15(6) = 90$
$B(4,2)$	$P = 10(4) + 15(2) = 70$
$C(5, 0)$	$P = 10(5) + 15(0) = 50$
$D(0, 0)$	$P = 10(0) + 15(0) = 0$

أكبر ربح مُمكِن هو 90 دينارًا، وذلك عند إنتاج 0 قطعة من النوع الأوَّل و6 قطع من النوع الثاني وبيعها يوميًّا.

كتاب التمارين

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

كتابة متباينة خطية بمتغير واحد تمثل جملة معطاة (الدرس 1)

أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

1. عدد مضاف إليه 7 أكبر من 20 $h + 7 > 20$
2. ثُلثا عدد مطروحًا منه 5 لا يزيد على 15 $\frac{2}{3}n - 5 \le 15$
3. عدد مطروح منه 9 أكبر من 5 − $m - 9 > -5$
4. أربعة أمثال مجموع عدد مع 5 أكبر من 2 $4(x + 5) > 2$
5. العدد 6 أقل من أو يساوي مجموع عدد و15 $6 \le t + 15$
6. خُمس عدد مضافًا إليه 3 لا يقل عن عشر العدد مضافًا إليه 8 $\frac{1}{5}a + 3 \ge \frac{1}{10}a + 8$
7. العدد 8 مطروحًا منه مثلَي عدد ما أكبر من 20 $8 - 2b > 20$
8. ثلاثة أمثال عمر سلمى بالسنوات مضافًا إليه 12 لا يزيد عن 18 $3y + 12 \le 18$

مثال: أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

a) عدد مطروح منه 4 أكبر من 120

المتغير: ليكن h يمثل العدد.

المتباينة: $h - 4 > 120$

b) نصف عدد طلبة صفي مطروحًا منه 10 لا يقل عن 6

المتغير: ليكن n يمثل عدد طلبة صفي.

المتباينة: $\frac{1}{2}n - 10 \ge 6$

حَلُّ المتباينات الخطية بمتغير واحد (الدرس 1)

أحلّ المتباينتين الخطيتين الآتيتين:

9. $2x + 3 \le 7x - 2$ مجموعة الحل: $[1, \infty)$.
10. $9x - 8 > 2(3x + 8)$ مجموعة الحل: $(8, \infty)$.

مثال: أحلّ المتباينة الخطية: $8x - 5 \le 4x + 7$

المتباينة الخطية	$8x - 5 \le 4x + 7$
بطرح $4x$ من الطرفين	$4x - 5 \le 7$
بجمع العدد 5 للطرفين	$4x \le 12$
بقسمة الطرفين على العدد 4	$x \le 3$
مجموعة الحَلّ	$(-\infty, 3]$

استعمال المتباينات الخطية بمتغير واحد للتعبير عن موقف حياتي، وحلها (الدرس 1)

11. **تسويقٌ:** ترغب ريم في الإعلان عن منتجات شركتها على موقع إلكتروني مقابل JD 10 شهريًّا، إضافة إلى JD 0.05 عن كل من يزور موقع الإعلان. أجد أقل عدد من الزيارات الشهرية لموقع الإعلان ليكون المبلغ الشهري الذي يتقاضاه الموقع الإلكتروني من شركة ريم JD 100 على الأقل. 1800 زيارة.

12. **صناعة:** يمتلك كرم معملًا لإنتاج الطاولات تكلفة تشغيله الأسبوعية JD 270، إضافة إلى JD 60 لإنتاج الطاولة الواحدة. يبيع كرم الطاولة الواحدة بمبلغ JD 150. أكتب متباينة يمكن استخدامها لتحديد عدد الطاولات التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق ربح أسبوعي، وأحلّ المتباينة.
$60n + 270 < 150n$
$270 < 90n$
$n > 3$ إذن، يجب إنتاج 4 طاولات أسبوعيًّا على الأقل.

مثال: مصاعد: يبلغ الحد الأقصى لحمولة مصعد في البناية التي يسكن فيها هشام 400 kg إذا أراد هشام تحميل مجموعة من الصّناديق كتلة الواحد منها 20 kg، فما أكبر عدد من الصناديق يمكن له تحميلها في المصعد بأمان؟ علمًا بأنّ كتلة هشام 80 kg

بالكلمات كتلة هشام وكتلة الصناديق أقل من أو يساوي 400

المتغير ليكن x عدد الصناديق، إذن كتلة الصناديق $20x$

المتباينة $80 + 20x \le 400$

المتباينة الأصلية	$80 + 20x \le 400$
أطرح 80 من طرفي المتباينة	$80 - 80 + 20x \le 400 - 80$
أقسم طرفي المتباينة على 20	$\frac{20x}{20} \le \frac{320}{20}$
أبسط	$x \le 16$

إذن، يمكن لهشام تحميل 16 صندوقًا كحد أقصى في المصعد.

استعمال المتباينات الخطية بمتغيرين للتعبير عن موقف حياتي (الدرس 1)

13. **نجارة:** إذا علمت أن نجارًا يريد شراء نوعين من الخشب، لا يزيد ثمنهما الكلي على JD 72 ووُجِد أن ثمن المتر الطولي من النوع الأول JD 4، ومن النوع الثاني JD 6، فأكتب متباينة خطيّة بمتغيّرين تمثل كميّة الخشب التي يمكن للنّجار شراؤها من كلّ نوع. $4x + 6y \le 72$

14. **تسوق:** تريد سامية شراء العنب والتّفاح، بحيث لا يزيد المبلغ الذي تدفعه ثمنًا لكلا النّوعين على JD 6 إذا كان ثمن الكيلوغرام الواحد من العنب JD 1.5، وثمن الكيلوغرام الواحد من التفاح JD 1، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الكيلوغرامات التي يمكن لسامية أن تشتريها من كل نوع.
$1.5x + y \le 6$

مثال: إذا علمت أنّ لدى عمّار 60 دقيقةً على الأكثر لإنهاء الواجب المنزلي لمادتي الرياضيات والعلوم، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الدقائق التي يمكن أن يقضيها عمار في حل كل واجب.

يمكنني اتباع الإجراءات الآتية، لكتابة المتباينة المطلوبة:

بالكلمات: عدد الدقائق اللازمة لإنهاء الواجب المنزلي على الأكثر 60 دقيقة.

أختار متغيرًا: ليكن x ممثلًا لعدد الدقائق اللازمة لإنهاء واجب الرياضيات، و y عدد الدقائق اللازمة لإنهاء واجب العلوم.

أكتب المتباينة: $x + y \le 60$

تمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي (الدرس 1)

أمثّل كلًّا من المعادلات الآتية في المستوى الإحداثي: (15–17)، أنظر ملحق الإجابات.

15. $x - 2y = 10$
16. $3x + y = 27$
17. $-7x - 2y = -14$

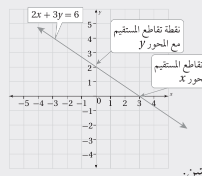
كتاب التمارين

أستعد لدراسة الوحدة

مثال: أمثّل المعادلة: $2x + 3y = 6$ في المستوى الإحداثي.

لتمثيـل المعادلة الخطية، أجد نقطة تقاطع المسـتقيم مع المحور x بتعويـض $y = 0$، ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y، بتعويض $x = 0$:

بتعويض $y = 0$ في المعادلة	$2x + 3(0) = 6$
بالتبسيط	$x = 3$
بتعويض $x = 0$ في المعادلة	$2(0) + 3y = 6$
بالتبسيط	$y = 2$



إذن، نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x هي $(3, 0)$، ونقطة تقاطعه مع المحور y هي $(0, 2)$.

لتمثيل المعادلة بيانيًّا، أرسم في المستوى الإحداثي مستقيمًا يمرُّ بهاتين النقطتين.

حَلُّ نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بطريقة الحذف (الدرس 3)

أحلّ أنظمة المعادلات الخطية الآتية بطريقة الحذف:

18) $x + y = 5$, $x - y = 1$ $(3, 2)$

19) $2x + y = 9$, $x - y = 0$ $(3, 3)$

20) $x - y = 5$, $x + 2y = -1$ $(3, -2)$

مثال: أحلّ نظام المعادلات الخطية الآتي بطريقة الحذف:

$$2x + y = 4$$
$$x + 3y = 7$$

المعادلة الأولى	$2x + y = 4$
بضرب المعادلة الثانية في العدد 2	$2x + 6y = 14$
بطرح المعادلتين	$-5y = -10$
بقسمة طرفي المعادلة على العدد 5-	$y = 2$
بتعويض قيمة y في المعادلة الثانية	$x + 3(2) = 7$
بطرح العدد 6 من الطرفين	$x = 1$
حَلُّ النظام	$(1, 2)$

الدرس 1

حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا

Solving Linear Inequality in Two Variables Graphically

أحدّد إذا كان الزوج المرتّب يمثّل حلًّا للمتباينة: $2x - 8y \geq -6$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(1, 1)$ النقطة $(1, 1)$ حل للمتباينة.

2) $(0, 3)$ النقطة $(0, 3)$ ليست حلًّا للمتباينة.

3) $(2, -3)$ النقطة $(2, -3)$ حل للمتباينة.

4) أحدّد المتباينة الخطية التي يمثّل الزوج $(2, -1)$ حَلًّا لها ممّا يأتي:

$5x - y > -2$ | $2x + 3y \geq 4$ | $x + y < 1$

أمثّل كلًّا من المتباينات الخطية الآتية في المستوى الإحداثي: (5–10)، أنظر ملحق الإجابات.

5) $7x - 2y < 5$

6) $-6x + 4y \geq -2$

7) $5x + 7y \leq 3$

8) $-x - y > -1$

9) $x - 9y \geq -6$

10) $-4x - 7y < 8$

(11–14)، أنظر ملحق الإجابات.

11) **طلاء:** أراد زياد شراء نوعين من ألوان الطلاء، سعر النوع الأول دينار واحد لكل كيلوغرام، وسعر النوع الثاني 1.25 دينار لكل كيلوغرام. كم كيلوغرامًا من كل نوع سيشتري زياد إذا كان معه 6 دنانير؟

12) **مطاعم:** يبيع مطعم للوجبات السريعة نوعين من الوجبات، سعر النوع الأول 4 دنانير، وسعر النوع الثاني 3 دنانير. أجد عدد الوجبات التي يجب بيعها من كل نوع يوميًّا، بحيث لا يقل سعرها عن مصروفات المطعم اليومية التي تبلغ 750 دينارًا.

13) **صناعة:** يُنتِج مصنع نوعين من أنابيب الماء، سعر النوع الأول ديناران للمتر، وسعر النوع الثاني 1.5 دينار للمتر. أجد عدد الأمتار التي يُمكِن إنتاجها من كل نوع، بحيث لا تقل إيرادات المصنع عن 3200 دينار يوميًّا.

14) تُستعمَل 18 kg من مادة البلاستيك لصنع خزّان مياه صغير، وتُستعمَل 40 kg من المادة نفسها لصنع خزّان مياه كبير. أجد عدد الخزّانات الصغيرة والكبيرة التي يُمكِن صنعها باستعمال 1000 kg من مادة البلاستيك.

ملاحظاتي

الدرس 2
حَلُّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا
Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

أمثّل منطقة حَلِّ كلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية، ثم أتحقّق من صحة الحلّ: (1–8)، أنظر ملحق الإجابات.

1) $7x - 5y > 1$
$x + 3y < 1$

2) $-8x - 5y \le -3$
$2x + 7y < 6$

3) $4x - 8y \ge 5$
$-2y + x < -3$

4) $9x + 3y \le 6$
$3x + y \ge 2$

5) $-x - y \le 2$
$7x - 6y \ge 4$
$2x + 5y > 4$

6) $9x + y < 8$
$4x + 3y \ge 6$
$-8x + y \ge -5$

7) $x - 3y < 1$
$2x - 6y \ge 5$
$4x - 12y \ge 9$

8) $-6x - 3y \ge -12$
$3x + \frac{3}{2}y \ge 6$
$x + \frac{1}{2}y \le 2$

عمل خيري: مع حاتم 20 دينارًا، أراد أنْ يشتري بها نوعين من وجبات الإفطار في شهر رمضان للتصدُّق بها، فوجد أنَّ سعر النوع الأول (A) هو 1.5 دينار، وسعر النوع الثاني (B) هو ديناران، وقد قرَّر شراء أكثر من 9 وجبات من كلا النوعين:

9) أكتب نظام المتباينات الخطية الذي يمثّل عدد الوجبات التي يُمكِن لحاتم شراؤها من كلا النوعين. أنظر ملحق الإجابات.

10) أمثّل نظام المتباينات بيانيًّا. أنظر ملحق الإجابات.

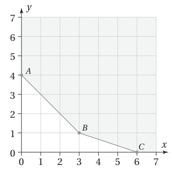
11) أجد ثلاثة حلول مُمكِنة لنظام المتباينات الآتي:

$x + y \ge 0$
$y \ge 0$
$x \ge 0$

$(1,1), (2,2), (0,0)$

الدرس 3
البرمجة الخطية
Linear Programming

1) إذا كان التمثيل البياني للقيود الآتية كما في الشكل المجاور، فأجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $Q = 4x + 2y$ أصغر ما يُمكِن:



$x + y \ge 4$
$x + 3y \ge 6$
$x \ge 0 , y \ge 0$

أصغر قيمة هي $Q = 8$ عند النقطة $(0, 4)$.

2) أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $W = x + 2y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$x + y \le 20$
$2x + y \le 30$
$x \ge 0 , y \ge 0$

أكبر قيمة هي $W = 40$ عند النقطة $(0, 20)$.

3) **درّاجات هوائية:** يُنتِج مصنع نوعين من الدرّاجات الهوائية A, B. ويُبيِّن الجدول المجاور عدد الساعات التي يستغرقها إنتاج كلٍّ من النوعين في أقسام المصنع الثلاثة. إذا كان عدد ساعات العمل الأسبوعية في كل قسم لا يزيد على 40 h للتجميع، و 48 h للدهان، و 13 h للتغليف، وكان ربح الدرّاجة الواحدة المَبيعة 45 دينارًا للنوع A، و30 دينارًا للنوع B، فكم درّاجة من كل نوع يتعيَّن على المصنع إنتاجها أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟ أنظر ملحق الإجابات.

القسم	النوع A	النوع B
التجميع	2 h	2 h
الدهان	4 h	1 h
التغليف	1 h	0.5 h

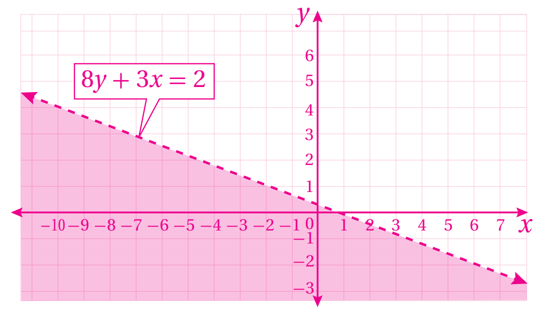
4) **صالة زفاف:** أرادت فاطمة دعوة 250 شخصًا إلى حفل زفاف، وتعيَّن عليها استئجار طاولات ليجلس حولها المدعوون. عرضت عليها صالة زفاف تأجيرها نوعين من الطاولات: طاولات مستطيلة الشكل تتسع لـ 6 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 28 دينارًا، وطاولات دائرية الشكل تتسع لـ 10 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 52 دينارًا. إذا كانت الصالة تسع 35 طاولة من كلا النوعين على الأكثر، وكان أكبر عدد يُمكِن توفيره من الطاولات المستطيلة الشكل 15 طاولة، فما عدد الطاولات التي يُمكِن لفاطمة استئجارها من كلا النوعين بأقل تكلفة مُمكِنة؟

أنظر ملحق الإجابات.

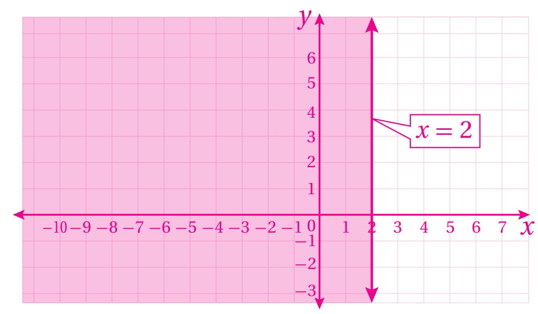
ملاحظاتي

الدرس 1 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرّب وأحل المسائل):

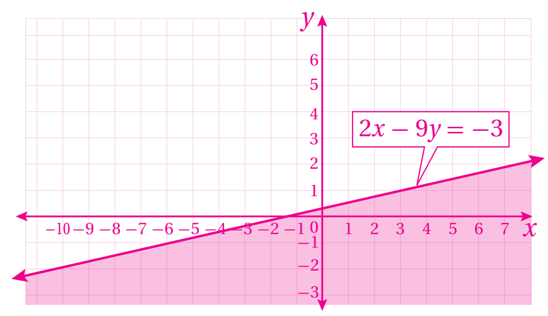
13)



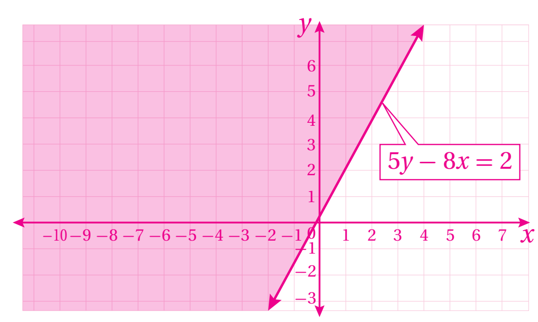
14)



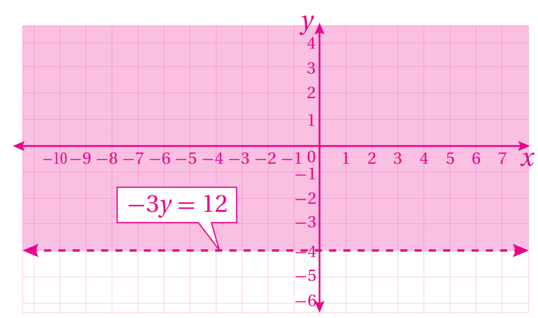
15)



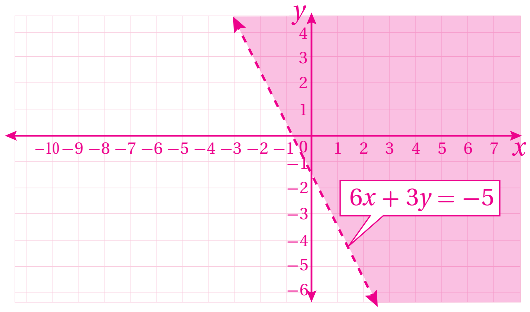
16)



17)



18)

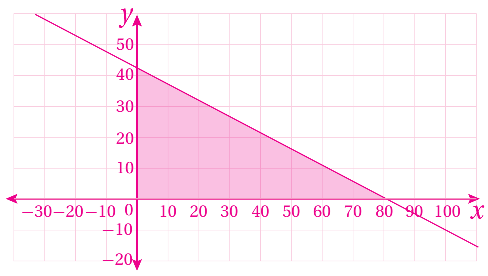


19) بتعويض $x = 20$ و $y = 18$ ينتج $93 \geq 96$، وهي عبارة صحيحة.

إذن، تحصل منى على درجة A.

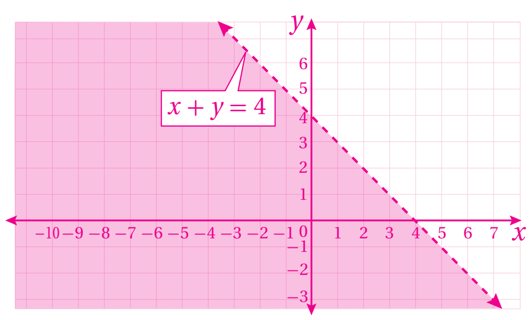
20) التعبير عن المسألة بالمتباينة: $50x + 95y \leq 4000$

وبتمثيلها بيانيًّا، أجد منطقة الحل.



أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل.

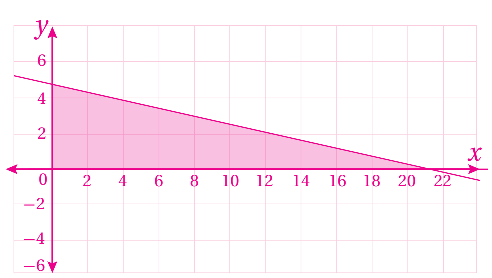
21) أقبل جميع الإجابات الصحيحة، مثل التمثيل البياني الآتي:



23) التعبير عن المسألة بالمتباينة: $10x + 45y \leq 214$

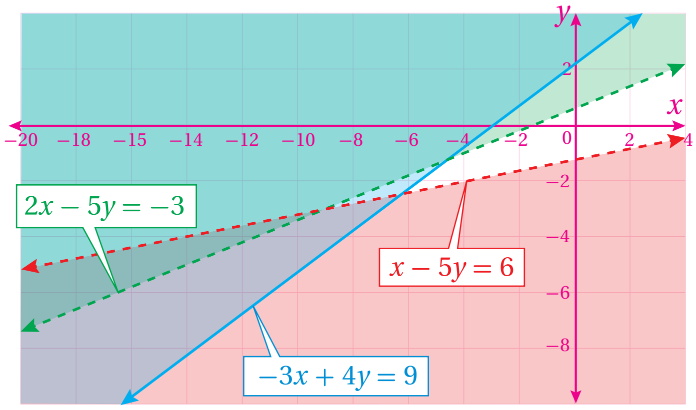
حيث x عدد الأساور، و y عدد الأطواق.

وبتمثيلها بيانيًّا، أجد منطقة الحل.



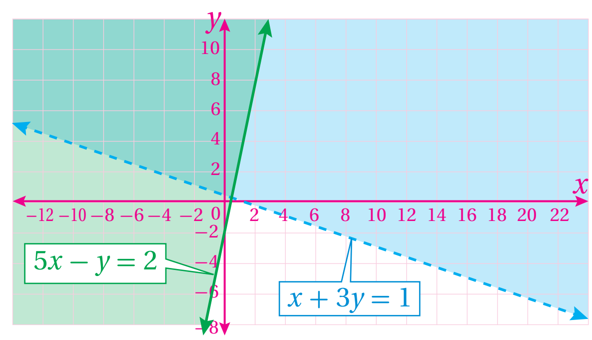
أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل.

الدرس 2 – إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 3):

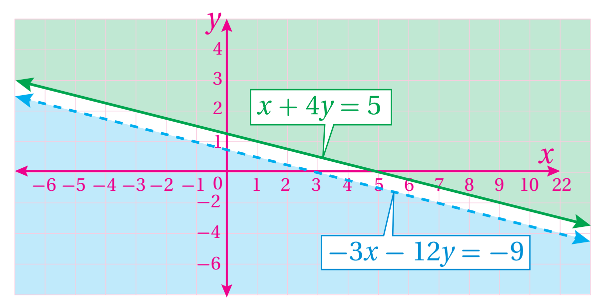


الدرس 2 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

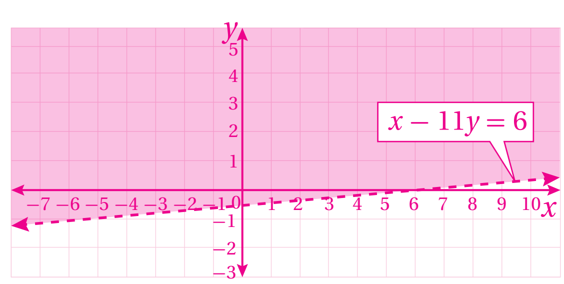
1)



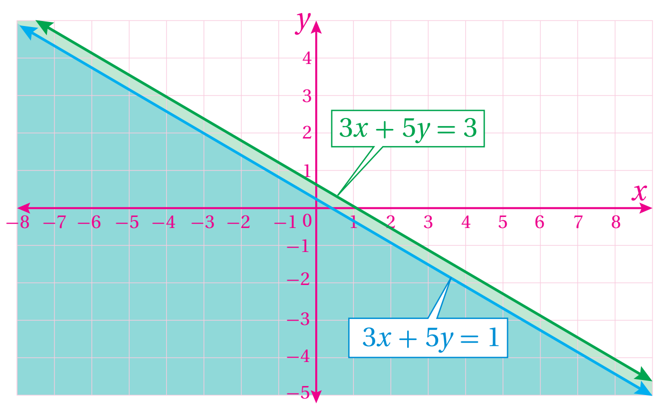
2) لا توجد منطقة مشتركة؛ أيْ لا يوجد حل.



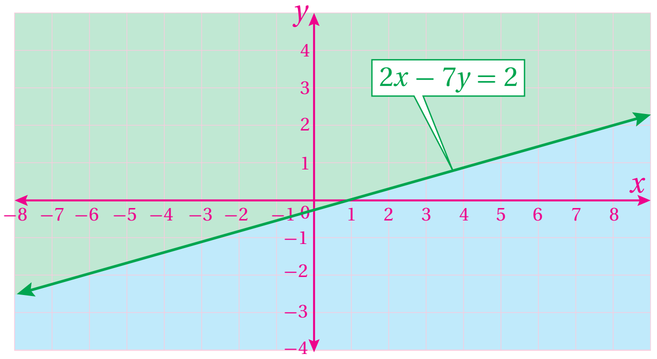
3) المتباينتان هما نفس المتباينة.



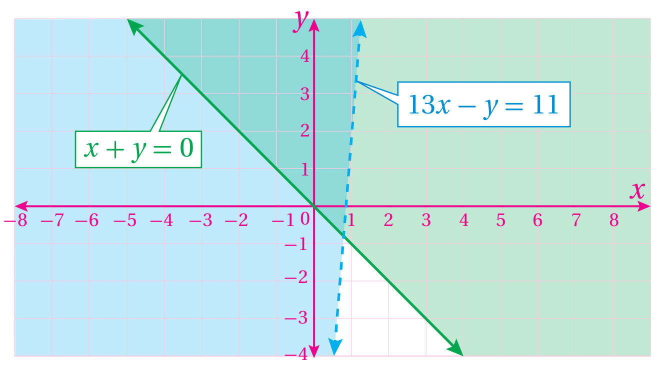
4)



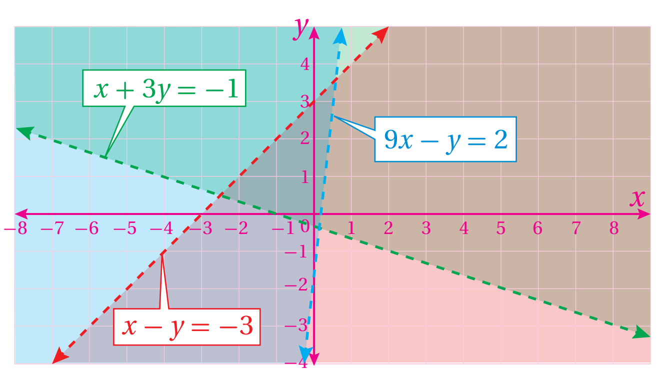
5) لا يوجد حل لهـذا لنظام، لأن مجموعة حـل $2x-7y \leq 2$ هي المسـتقيم الحدودي والمنطقـة الواقعة فوقـه، ومجموعة حل $2x-7y > 2$ هي المنطقـة الواقعة تحت المسـتقيم الحدودي نفسه، فلا يوجد منطقة مشتركة بين الحلين.



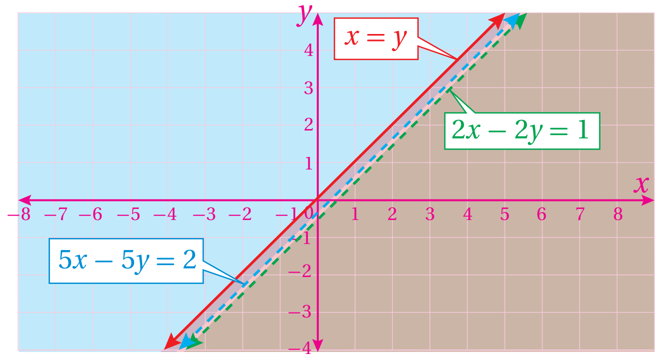
6)



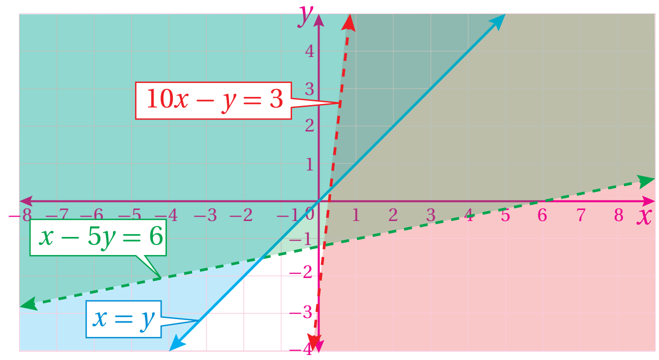
7)



8) لا توجد منطقة مشتركة بين حلول المتباينات الثلاث بسبب تناقض المتباينتين الأوليين.



9)

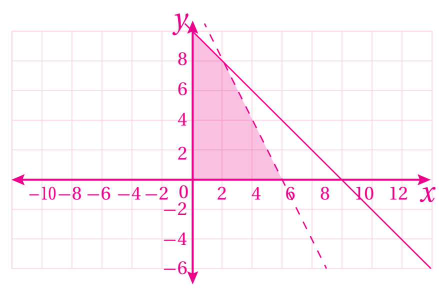


10) بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثِّل المسألة:

$$x + y \leq 10$$

$$2x + y < 12$$

بتمثيل النظام بيانيًّا:



أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل؛ لأنَّها تُمثِّل أعداد أشخاص.

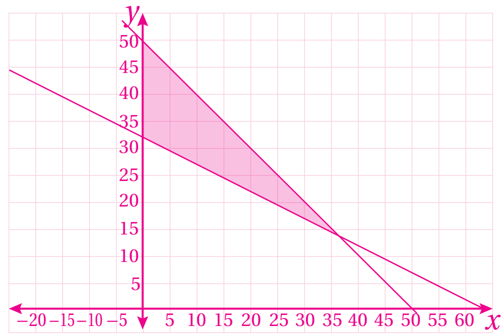
11) أفترض أنَّ عدد تذاكر الدرجة السياحية هو x، وأنَّ عدد تذاكر الدرجة الخاصة هو y.

بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثِّل المسألة:

$$25x + 50y \geq 1600$$

$$x + y \leq 50$$

بتمثيل النظام بيانيًّا:



أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل؛ لأنَّها تُمثِّل أعداد تذاكر سفر.

13) أفترض أنَّ عدد النقاط في الرياضيات هو x، وأنَّ عدد النقاط في اللغة الإنجليزية هو y.

بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثِّل المسألة:

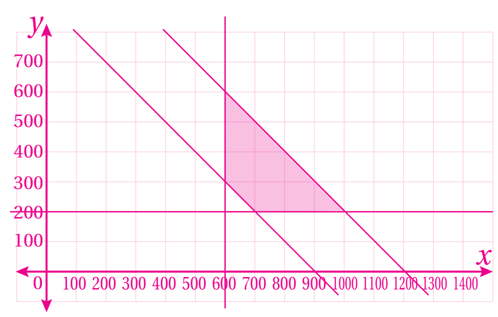
$$x + y \geq 900$$

$$x + y \leq 1200$$

$$x \geq 600$$

$$y \geq 200$$

بتمثيل النظام بيانيًّا:



أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها من مضاعفات المئة، وهي تقع في منطقة الحل مثل:

$(600, 300)$، $(700, 200)$، $(1000, 200)$، علمًا بأنَّه يوجد 14 زوجًا تُحقِّق النظام.

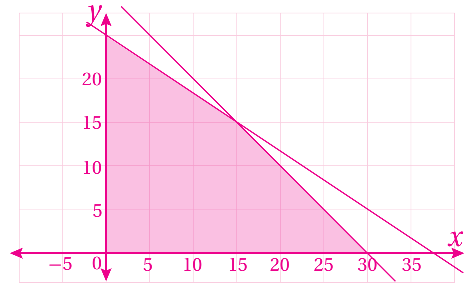
14) أفترض أنَّ عدد السيارات الصغيرة هو x، وأنَّ عدد السيارات الكبيرة هو y.

بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثِّل المسألة:

$$2x + 3y \leq 75$$

$$x + y \leq 30$$

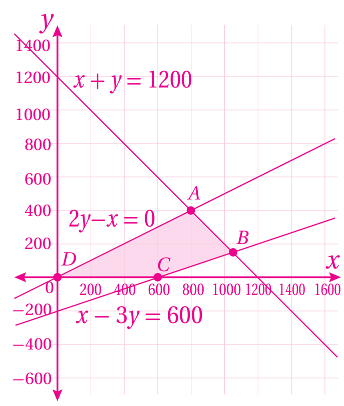
بتمثيل النظام بيانيًّا:



أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل؛ لأنَّها تُمثِّل أعداد سيارات.

الدرس 3 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

7) x: عدد علب الشوكولاتة المغطاة بالفستق، y: عدد علب الشوكولاتة المغطاة بالبندق.



المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتران.

$$P = 1.5x + 2y$$

تحت القيود:

$$x + y \leq 1200$$

$$2y - x \leq 0$$

$$x - 3y \leq 600$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

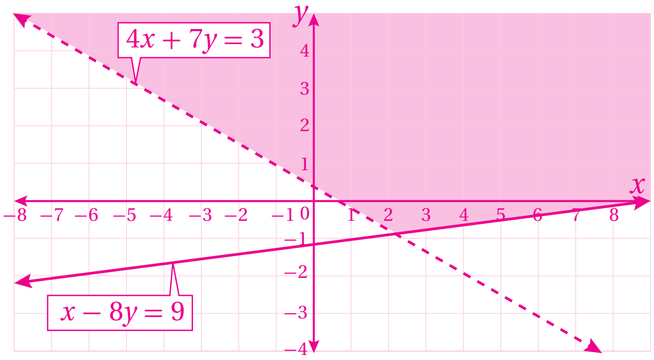
رؤوس منطقة الحل	$P = 1.5x + 2y$
$D(0, 0)$	$P = 0$
$C(600, 0)$	$P = 1.5(600)+0=900$
$B(1050, 150)$	$P = 1.5(1050)+2(150) = 1875$
$A(800, 400)$	$P = 1.5(800)+2(400) = 2000$

أكبر ربح مُمكِن هو 2000 دينار ، وذلك عند إنتاج 800 علبة شوكولاتة مغطاة بالفستق و 400 علبة شوكولاتة مغطاة بالبندق وبيعها شهريًّا.

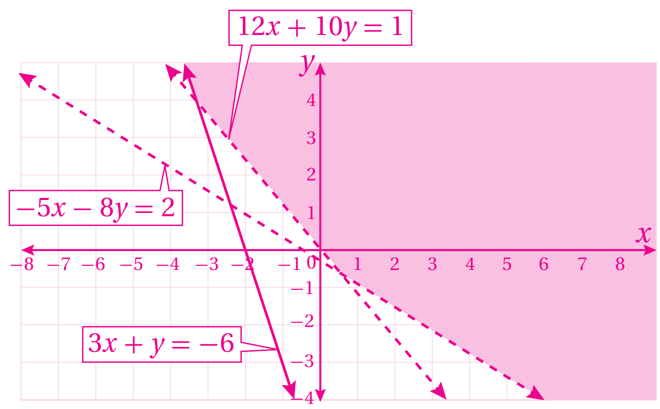
10) أكبر ربح هو $P = 16$، وذلك عند أيٍّ من النقاط: $(4, 6), (6, 5), (8, 4), (10, 3)$، أو أيِّ نقطة إحداثياها عددان صحيحان، وهي تقع على القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان C, D؛ لأنَّ الاقتران الهدف P يوازي هذه القطعة المستقيمة.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

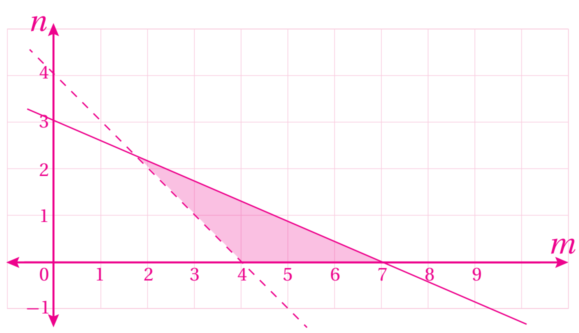
5)



6)



9) بتمثيل النظام بيانيًّا:



الزوج المُرتَّب الوحيد الذي إحداثياه عددان صحيحان موجبان ضمن منطقة الحل هو (4,1).

13) x: عدد كيلوغرامات الطحين العادي، y: عدد كيلوغرامات طحين الشوفان.

المطلوب: إيجاد أصغر قيمة للاقتران.

$C = 0.5x + 0.8y$

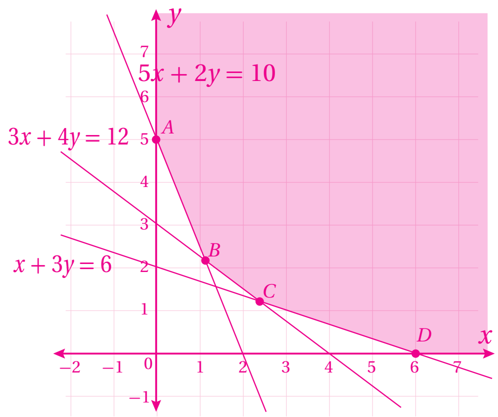
تحت القيود:

$3x + 4y \geq 12$

$5x + 2y \geq 10$

$x + 3y \geq 6$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$

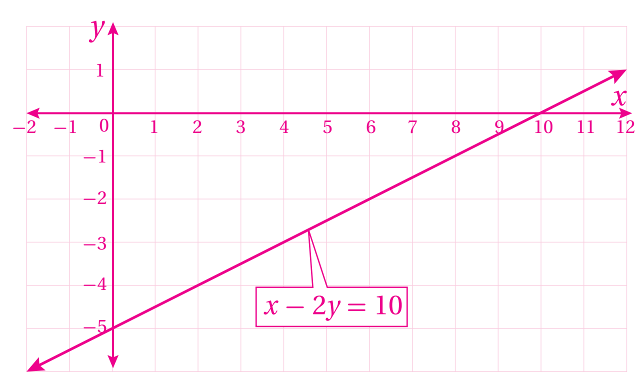


رؤوس منطقة الحل	$C = 0.5x + 0.8y$
$A(0, 5)$	$C = 0 + 0.8(5) = 4$
$B(\frac{8}{7}, \frac{15}{7})$	$C = 0.5(\frac{8}{7}) + 0.8(\frac{15}{7}) \approx 2.29$
$C(\frac{12}{5}, \frac{6}{5})$	$C = 0.5(\frac{12}{5}) + 0.8(\frac{6}{5}) = 2.16$
$D(6, 0)$	$C = 0.5(6) + 0.8(0) = 3$

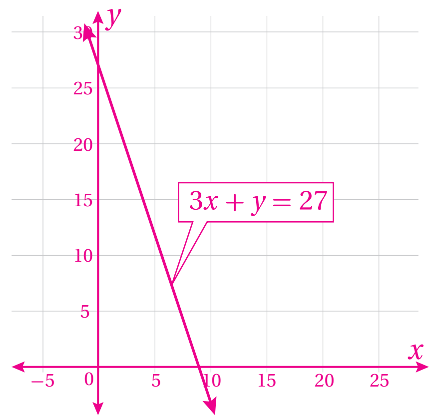
أقل تكلفة مُمكِنة هي 2.16 من الدينار، وذلك عند خلط 2.4 kg من الطحين العادي مع 1.2 kg من طحين الشوفان.

كتاب التمارين – إجابة الأسئلة في بند (أستعد لدراسة الوحدة):

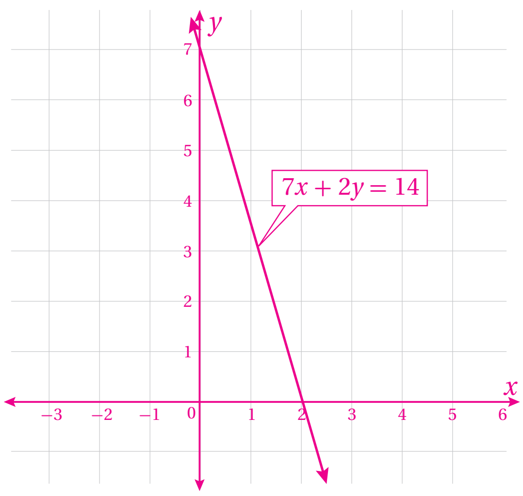
15)



16)

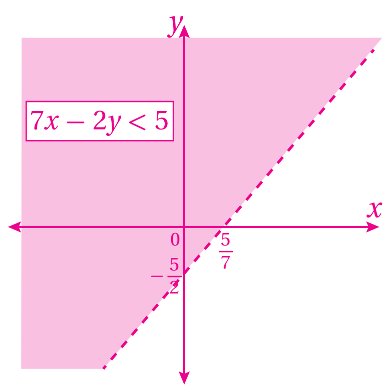


17)

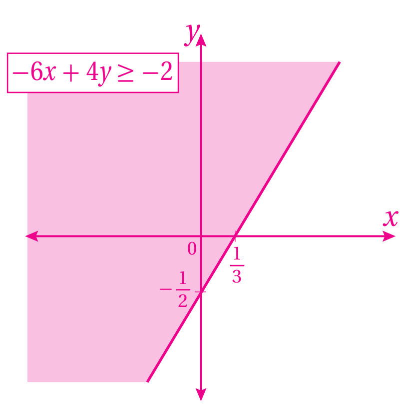


كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (1):

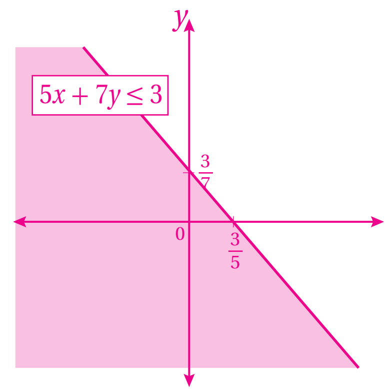
5)



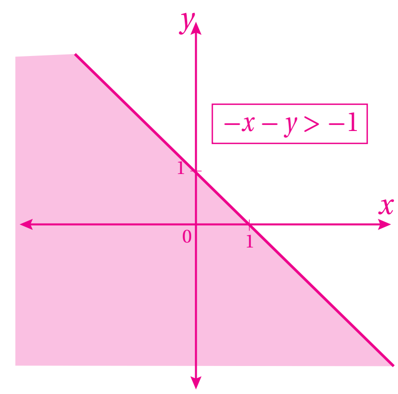
6)



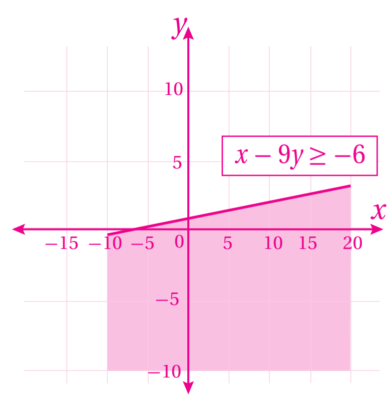
(7



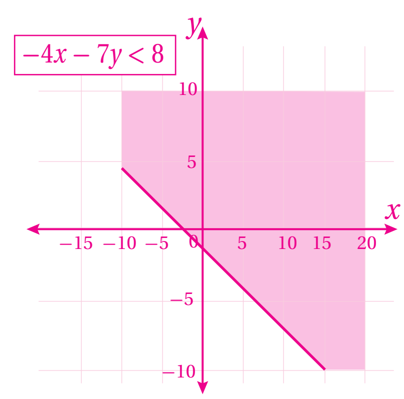
(8



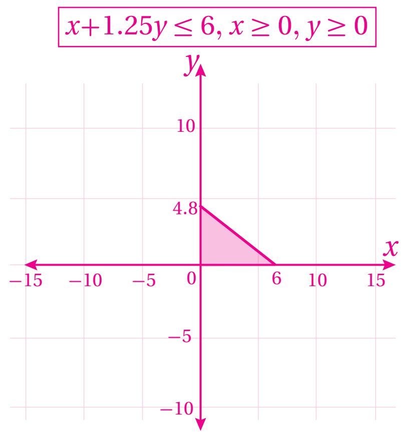
(9



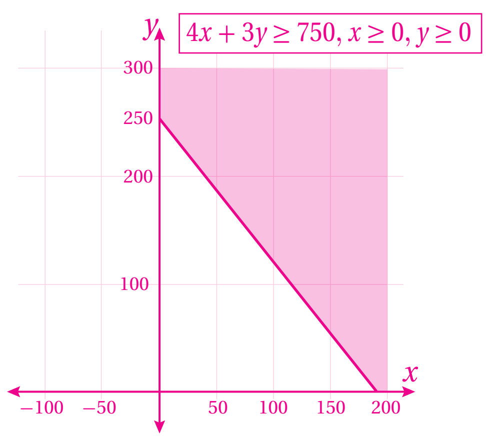
(10



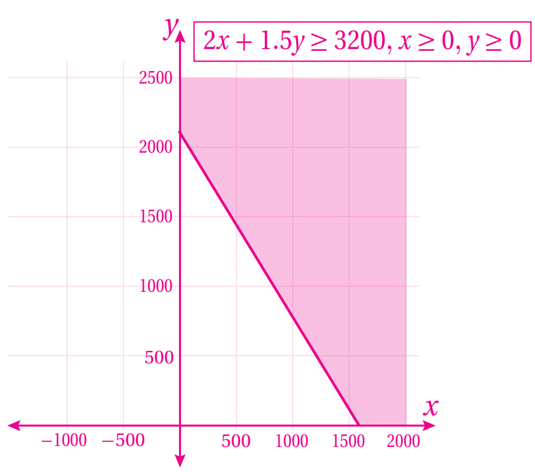
(11 أختار أيَّ زوج مُرتَّب من منطقة الحل الواقعة في الربع الأول التي تُمثِّل حل المتباينة: $x + 1.25y \le 6$، حيث x عدد الكيلوغرامات مـــن النوع الأوَّل، و y عدد الكيلوغرامات مـــن النوع الثاني، مثل: $(4, 0), (5,0),(6,0), (1, 3)$، وغيرها كثير.



(12 أختار أيَّ حل صحيح من منطقة حل المتباينة: $4x + 3y \ge 750$، حيث x عدد وجبات النوع الأوَّل، و y عدد وجبات النوع الثاني.

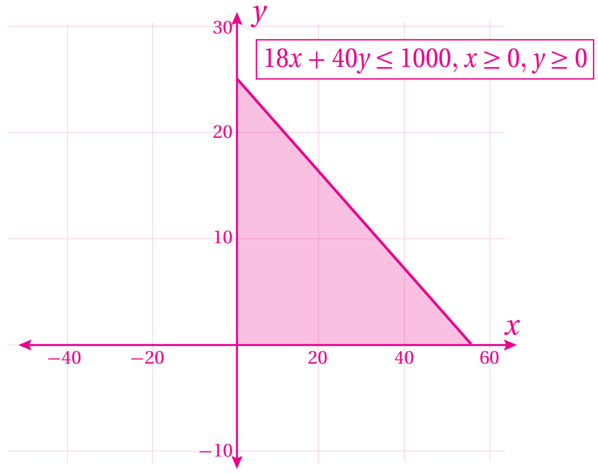


(13 أختار أيَّ حـــل من منطقة حل المتباينـــة: $2x + 1.5y \ge 3200$، حيث x عدد أمتار النوع الأوَّل، و y عدد أمتار النوع الثاني.



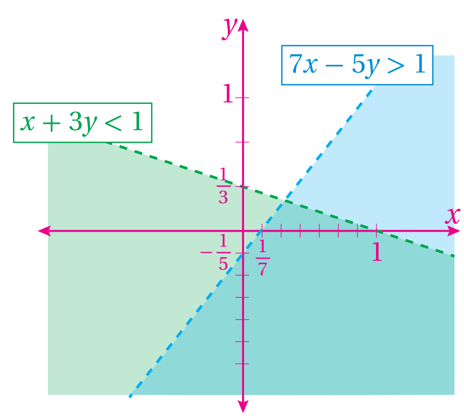
14) أختـــار أيَّ زوج مُرتَّب إحداثياه عــددان صحيحان من منطقة حل المتباينة: $18x + 40y \leq 1000$، حيث x عدد الخزانات الصغيرة التي يراد صنعها، و y عدد الخزانات الكبيرة، مثل:

$(18, 15)$, $(15, 20)$, $(40, 6)$, $(55, 0)$، وغيرها كثير.



كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (2):

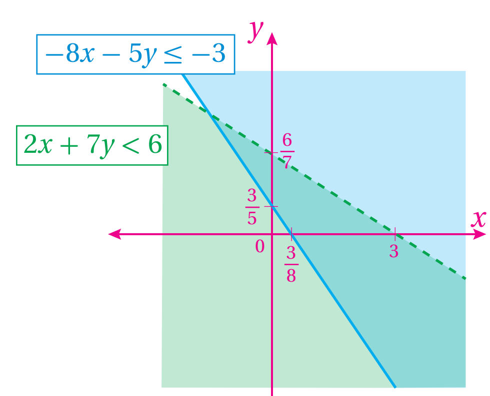
1)



للتحقُّق من صحة الحل، أختار النقطة $(0, -6)$ وأُعوِّضها في كلتا المتباينتين:

$7(0) - 5(-6)$	$=$	30	$>$	1	✓
$0 + 3(-6)$	$=$	-18	$<$	1	✓

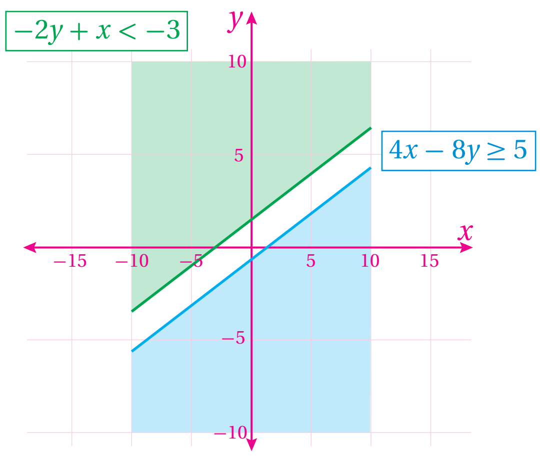
2)



للتحقُّق من صحة الحل، أختار النقطة $(5,-5)$، وأُعوِّضها في كلتا المتباينتين:

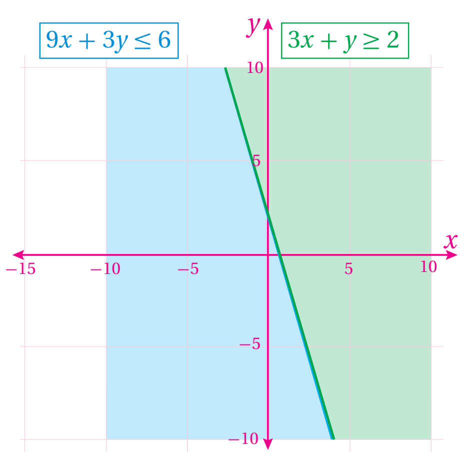
$2(5) + 7(-5)$	$=$	-25	$<$	6	✓
$-8(5) - 5(-5)$	$=$	-15	$\leq$	-3	✓

3)



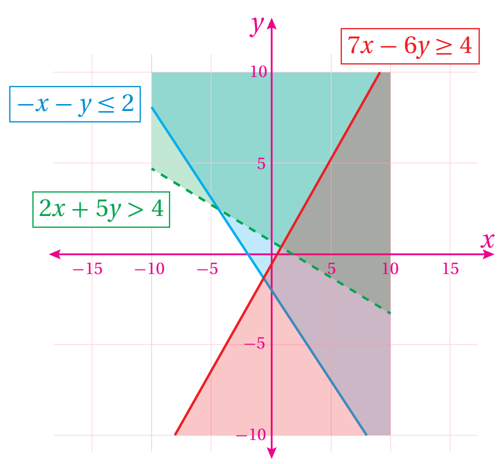
لا توجد منطقة مشتركة؛ لذا لا يوجد حل للنظام.

4)



منطقة الحل هي فقط المستقيم: $3x + y = 2$، وهو يُمثِّل تقاطع المنطقتين.

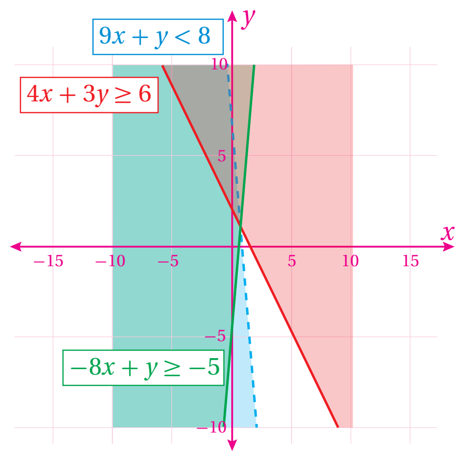
5)



للتحقُّق من صحة الحل، أختار النقطة $(10, 0)$، وأُعوِّضها في المتباينات:

$2(10)+5(0)$	$=$	20	$>$	4	✓
$7(10)-6(0)$	$=$	70	$\geq$	4	✓
$-10-0$	$=$	-10	$<$	2	✓

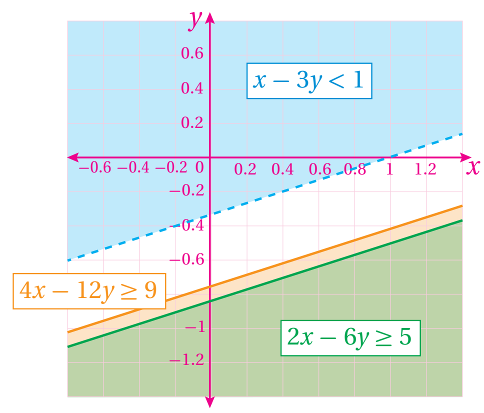
6)



للتحقُّق من صحة الحل، أختار النقطة $(0, 6)$ وأُعوِّضها في المتباينات:

$4(0)+3(6)$	$=$	18	$\geq$	6	✓
$9(0)+6$	$=$	6	$<$	8	✓
$-8(0)+6$	$=$	6	$\geq$	-5	✓

7)



لا يوجد حل لهذا النظام لعدم وجود منطقة مشــتركة بين حلول المتباينات الثلاثة.

8)

$$-\frac{1}{3}(-6x-3y \geq -12) \Rightarrow 2x + y \leq 4$$

$$\frac{2}{3}(3x + \frac{3}{2}y \geq 6) \Rightarrow 2x + y \geq 4$$

$$2(x + \frac{1}{2}y \leq 2) \Rightarrow 2x + y \leq 4$$

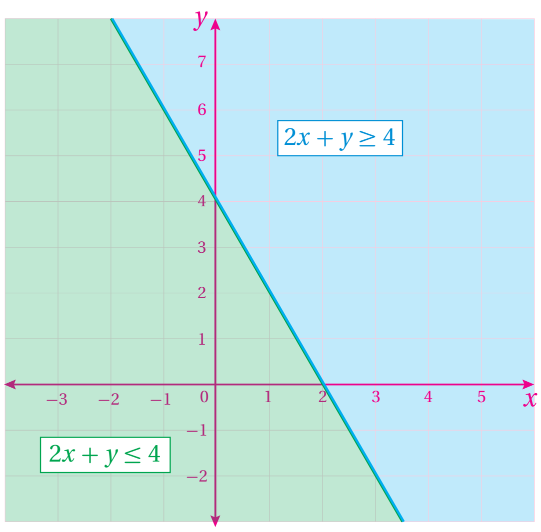
المتباينة الثالثة هي المتباينة الأولى نفسها.

إذن، حل هذا النظام هو حل النظام:

$$2x + y \leq 4$$

$$2x + y \geq 4$$

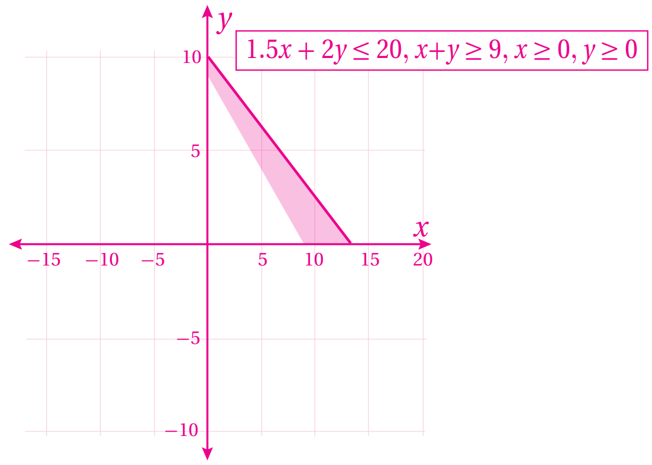
وبتمثيله بيانيًا نلاحظ أنّ المنطقة المشــتركة بين الحلين هي نقاط المستقيم الحدودي $2x + y = 4$ فقط.



9) x عدد وجبات النوع A، و y عدد وجبات النوع B.

$1.5x+2y$	$\leq$	20
$x+y$	$\geq$	9
x	$\geq$	0
y	$\geq$	0

10)



كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (3):

3) x: عدد الدرّاجات من النوع A، و y: عدد الدرّاجات من النوع B.

المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتران.

$$P = 45x + 30y$$

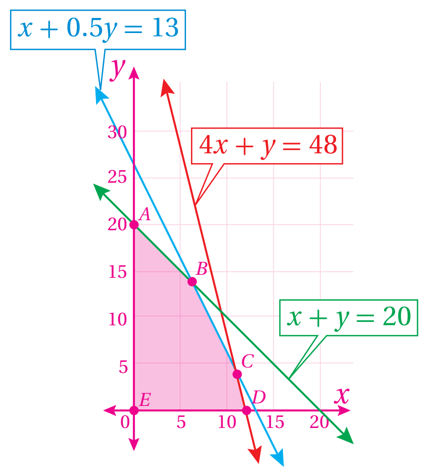
تحت القيود:

$$2x + 2y \leq 40$$

$$4x + y \leq 48$$

$$x + 0.5y \leq 13$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$



رؤوس منطقة الحل	$P = 45x + 30y$
$A(0, 20)$	$P = 45(0) + 30(20) = 600$
$B(6, 14)$	$P = 45(6) + 30(14) = 690$
$C(11, 4)$	$P = 45(11) + 30(4) = 615$
$D(12, 0)$	$P = 45(12) + 30(0) = 540$
$E(0, 0)$	$P = 45(0) + 30(0) = 0$

أكبر ربح هو 690 دينارًا وذلك عند إنتاج 6 درّاجات من النوع A و 14 درّاجة من النوع B وبيعها.

4) x: عدد الطاولات مستطيلة الشــكل، و y: عدد الطاولات دائرية الشكل.

المطلوب: إيجاد أصغر قيمة للاقتران.

$$P = 28x + 52y$$

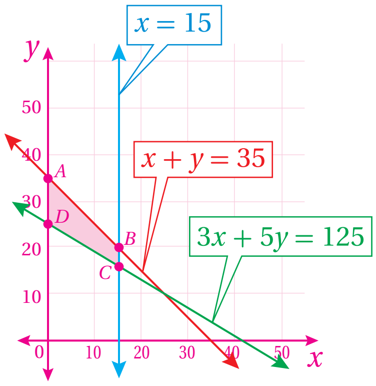
تحت القيود:

$$6x + 10y \geq 250$$

$$x + y \leq 35$$

$$x \leq 15$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$



رؤوس منطقة الحل	$P = 28x + 52y$
$A(0, 35)$	$P = 28(0) + 52(35) = 1820$
$B(15, 20)$	$P = 28(15) + 52(20) = 1460$
$C(15, 16)$	$P = 28(15) + 52(16) = 1252$
$D(0, 25)$	$P = 28(0) + 52(25) = 1300$

أقل تكلفة مُمكِنة هي 1252 دينارًا، وذلك عند اســتئجار 15 طاولة مستطيلة الشكل و 16 طاولة دائرية الشكل.

الوحدة
2

مبدأ العد والتباديل والتوافيق
Counting Principle, Permutations and Combinations

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: **مبدأ العد الأساسي.**	• تعرُّف مبدأ العد الأساسي. • توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما من الواقع.	مبدأ العد الأساسي.	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة.	4
الدرس 2: **مضروب العدد.**	• تعرُّف مضروب العدد الصحيح غير السالب. • توظيف مضروب العدد الصحيح غير السالب في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما من الواقع.	مضروب العدد.	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة، آلة حاسبة.	2
الدرس 3: **التباديل.**	• تعرُّف التباديل. • حساب التباديل يدويًّا، وباستعمال الآلة الحاسبة. • توظيف التباديل في حل مسائل حياتية.	التباديل.	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة، آلة حاسبة.	3
الدرس 4: **التوافيق.**	• تعرُّف التوافيق. • حساب التوافيق يدويًّا، وباستعمال الآلة الحاسبة. • توظيف التباديل في حل مسائل حياتية.	التوافيق.	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة، آلة حاسبة.	3
اختبار نهاية الوحدة.				1
مجموع الحصص:				13 حصة

الوحدة 2

مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُسهِم العَدُّ بدور رئيس في كثير من العلوم، مثل: الإحصاء، والاحتمال، والحاسوب، ويتطلّب أحيانًا استعمال طرائق مُتطوِّرة لإجرائه، ويُعَدُّ مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق إحدى أهمِّ الطرائق التي تُسهِّل عملية العَدِّ عند دراسة الاحتمال. سأتعرَّف في هذه الوحدة بعض استعمالات طرائق العَدِّ في المواقف الحياتية، مثل تنظيم مواعيد إقلاع الطائرات وهبوطها.

34

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة مبدأ العد الأساسي بوصفه إحدى الطرائق المهمة لمعرفة عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة ما. وكذلك سيتعلَّمون مفهوم مضروب العدد وكيفية استعماله لحل بعض المسائل، بدءًا باستعمال مبدأ العد الأساسي.

سيتعلَّم الطلبة أيضًا مفهوم التباديل ومفهوم التوافيق وكيفية توظيفهما في إيجاد الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة من الأشياء إنْ كان الترتيب مُهِمًّا أو غير مُهِمٍّ.

الوحدة

2

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ استعمال مخطط الشجرة للعَدِّ.
- ✓ استعمال الجدول للعَدِّ.
- ✓ استعمال القوائم المنظمة للعَدِّ.
- ✓ حَلَّ مسائل حياتية عن طرائق العَدِّ.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ ماهية مبـدأ العَدِّ الأساسـي، واسـتعماله في حَلِّ المسائل.
- ◄ ماهية مضروب العدد، واستعماله في حَلِّ المسائل.
- ◄ ماهية التباديل، واستعمالها في حَلِّ المسائل.
- ◄ ماهية التوافيق، واستعمالها في حَلِّ المسائل.

أسـتعمل تدريبات (أستعد لدراسـة الوحدة) في الصفحات (15 – 13) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

35

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف الثامن:

- تحديـد عناصـر الفضـاء العينـي باستعمال مُخطَّط الشجرة.
- تحديـد عناصـر الفضـاء العينـي باستعمال الجدول.

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- تعـرُّف مبـدأ العـد الأساسـي، واسـتعماله لحل مسائل حياتية.
- تعرُّف مضـروب العـدد الصحيح غير السـالب، واستعماله لحل مسائل حياتية.
- تعرُّف التباديل، واستعمالها لحل مسائل حياتية.
- تعرُّف التوافيق، واستعمالها لحل مسائل حياتية.

الصف الثاني عشر (الأدبي):

- تعرُّف التوزيع الاحتمالي الهندسي.
- تعرُّف التوزيع الاحتمالي ذي الحدين.
- حسـاب الاحتمال لكلٍّ من المُتغيِّر العشوائي الهندسي، والمُتغيِّر العشوائي ذي الحدين.
- تعـرُّف التوزيـع الطبيعـي، وحسـاب احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- تعرُّف مبدأ العد الأساسي.
- توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- تحديد عناصر الفضاء العيني باستعمال مُخطَّط الشجرة.
- تحديد عناصر الفضاء العيني باستعمال الجدول.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أُعطي كل مجموعة بطاقات، كُتِبت عليها الأحرف: A, B, C, D, E, F، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة ترتيب الأحرف بأكبر عدد مُمكِن من الطرائق المختلفة خلال دقيقة واحدة، وتدوين التراتيب التي توصَّلوا إليها في دفاترهم.
- أطلب إلى أفراد المجموعة الذين توصَّلوا إلى أكبر عدد من النتائج عرضها على اللوح.
- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - ◂ ما عدد الطرائق التي يُمكِن بها ترتيب هذه الأحرف الستة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - ◂ هل يُمكِن تحديد عدد هذه الطرائق من دون ترتيبها؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

الدرس 1

مبدأ العَدِّ الأساسي
Fundamental Counting Principle

فكرة الدرس تعرُّف مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حَلِّ المسائل.

المصطلحات مبدأ العَدِّ الأساسي.

مسألة اليوم بكم طريقة يُمكِن لرولا اختيار قطعة شوكولاتة من بين 3 أنواع، وقطعة بسكويت من بين 6 أنواع؟

يُمكِن بسهولة تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب عناصر مجموعة صغيرة. فمثلًا، توجد طريقتان فقط لترتيب عناصر المجموعة $\{a, b\}$، هما: ab و ba. ولكنْ إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيرًا، فإنَّ حصر جميع الطرائق المُمكِنة وعَدَّها يصبح أمرًا صعبًا.

تعلَّمْتُ سابقًا بعض طرائق تحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل: مخطط الشجرة، والجداول، والقوائم المنظمة؛ لذا يُمكِن الاستفادة منها في تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة ما.

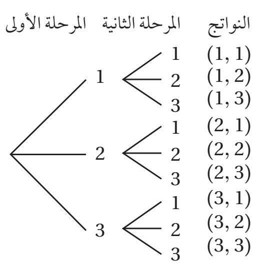
مثال 1

أجد باستعمال كلٍّ من الطرائق الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام: 1 ,2 ,3، علمًا بأنَّه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

أتعلَّم
تُمثِّل الأرقام السرية التسعة الناتجة عناصر الفضاء العيني لتجربة تكوين رقم ذي منزلتين من الأرقام: 1 ,2 ,3

1 مخطط الشجرة:

أرسم شكل شجرة مُكوَّنة من مرحلتين؛ الأولى تُمثِّل خيارات رقم منزلة العشرات، والثانية تُمثِّل خيارات رقم منزلة الآحاد كما في الشكل المجاور.



بعد عَدِّ النواتج، أُلاحِظ أنَّه يُمكِن تكوين رقم سري من منزلتين بـ 9 طرائق مختلفة.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
  - ◂ كم نوعًا من الشوكولاتة والبسكويت مع رولا؟ مع رولا 3 أنواع من الشوكولاتة، و6 أنواع من البسكويت.
  - ◂ كيف يُمكِن تحديد عدد الطرائق التي تُمكِّن رولا من اختيار قطعة شوكولاتة وقطعة بسكويت؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

أُفكِّر

هـل يُمكِن اسـتعمال الجدول في المسـائل التي تحـوي أكثر من مرحلتين؟

2 الجدول:

أَعُدُّ الطرائق المُمكِنة لذلك بتنظيم الأرقام السـرية التي يُمكِن تكوينها باستعمال جدول على النحو الآتي:

	1	2	3
1	1, 1	1, 2	1, 3
2	2, 1	2, 2	2, 3
3	3, 1	3, 2	3, 3

3 القائمة المنظمة:

أَعُدُّ الطرائق المُمكِنة لذلك بكتابة قائمة منظمة، يقترن فيها كل رقم من منزلة العشرات بجميع الأرقام المُمكِنة لمنزلة الآحاد في الرقم السري على النحو الآتي:

1, 3	1, 2	1, 1
2, 3	2, 2	2, 1
3, 3	3, 2	3, 1

أتحقَّق من فهمي

أجد باسـتعمال كلٍّ من الطرائـق الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم سـري من منزلتين باستعمال الأرقام: 3, 5, 7, 9، علمًا بأنَّه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

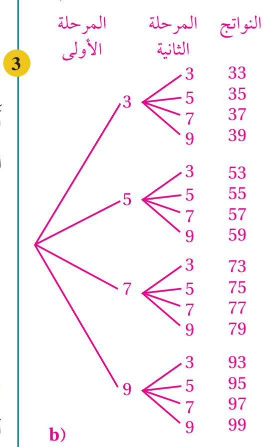
a) مخطط الشجرة.

b) الجدول.

c) القائمة المنظمة.

في كثيـر من الحالات يكون الاهتمام مُنحصِرًا في معرفة عـدد الطرائق التي يُمكِن بها إجراء تجربة عشـوائية مُكوَّنة من مراحل عِدَّة، من دون اهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمَل **مبدأ العَدِّ الأساسـي** (fundamental counting principle) لإيجاد عـدد الطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكِنة في كل مرحلة من مراحلها بعضها في بعض.

a)



b)

	3	5	7	9
3	33	35	37	39
5	53	55	57	59
7	73	75	77	79
9	93	95	97	99

c)

33	35	37	39
53	55	57	59
73	75	77	79
93	95	97	99

عدد النواتج = 16

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بما تعلَّموه فـي الصف الثامن من طرائق لتحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، وهي: مُخطَّط الشـجرة، والجدول، والقائمة المنظمة، مُبيِّنًا لهم أنَّه يُمكِن الاستفادة منها في تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة ما.
- أُناقِـش الطلبة في حـل المثال 1 على اللـوح، مُبيِّنًا لهم كيفيـة تحديد عـدد الطرائق المُمكِنـة لتكوين الرقم السري باسـتعمال مُخطَّط الشجرة، والجدول، والقائمة المنظمة.

إرشادات:

- أُوضِّـح للطلبة أنَّـه لا يُمكِن اسـتعمال طريقة الجدول لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة إذا كانت المسـألة تحوي أكثر من مرحلتيـن. أمّا طريقة الشـجرة فإنَّ اسـتعمالها يزداد صعوبة كلَّما زاد عدد المراحل.
- أُوضِّح للطلبـة أنَّ حل المسـألة يصبح مختلفًا إذا تعذَّر تكـرار الأرقام في المنزلتين، وأنَّ ذلك يُؤثِّر في عـدد الطرائق، ثم أطلـب إليهم إعادة حل المثال شـرط عدم تكرار الرقم نفسـه في المنزلتين.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حـل التدريب الوارد في بند (أتحقَّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشـتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحـات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ مـن اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّ ترتيب العناصر في النواتج غير مُهِمٍّ؛ لذا يَلزم تأكيد أهمية الترتيب. فمثلًا، الناتج (1, 3) مختلف عن الناتج (3, 1).

مثال 2: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة أهمية مبدأ العد الأساسي في تحديد عدد الطرائق المُمكِنة التي يُمكِن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عِدَّة، من دون الاهتمام بمعرفة النواتج نفسها.
- أُناقِش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق المفهوم الأساسي، وبيِّنت كيفية استعمال مبدأ العد لإيجاد العدد الكلي للطرائق التي يُمكِن بها تنفيذ تجربة عشوائية ما.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ما عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار مادة الحصة الأولى؟ 7 طرائق.
  - ما عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار مادة الحصة الثانية؟ 6 طرائق.
  - ما عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار مادة الحصة الثالثة؟ 5 طرائق.
  - إذن، بكم طريقة يُمكِن ترتيب المواد الدراسية في الحصص الثلاث الأولى من الجدول؟ باستعمال مبدأ العد الأساسي، فإنَّه يُمكِن ترتيب هذه المواد بنحو 210 طرائق.

تنويع التعليم:

توسعة:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة تجربة عشوائية حياتية مُتعدِّدة المراحل، ثم استعمال مبدأ العد الأساسي لتحديد عدد الطرائق المُمكِنة لهذه التجربة.

أتعلَّم

يُطلَق أيضًا على مبدأ العَدِّ الأساسي مصطلح قاعدة الضرب.

مفهوم أساسي — **مبدأ العَدِّ الأساسي**

للتجربة العشوائية التي يُمكِن تنفيذها في n مرحلة، إذا كان عدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الأولى هو K_1، وعدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الثانية هو K_2، ...، وعدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الأخيرة هو K_n، فإنَّ العدد الكلي للطرائق التي يُمكِن تنفيذ التجربة بها هو $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$.

مثال 2 : من الحياة

يحتوي جدول الحصص الأسبوعي لمنال على 7 مواد دراسية يوم الثلاثاء. أجد عدد التراتيب المُمكِنة لأول 3 حصص، علمًا بأنَّه لا توجد حصص مُكرَّرة لأيِّ مادة دراسية في هذا اليوم.

يوجد للحصة (المرحلة) الأولى 7 خيارات (مواد دراسية)، في حين يوجد للحصة الثانية 6 خيارات؛ لأنَّ منال لن تعيد دراسة مادة الحصة الأولى، أمّا الحصة الثالثة فلها 5 خيارات.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

210	=	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثالثة	×	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثانية	×	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الأولى
210	=	5	×	6	×	7

إذن، توجد 210 طرائق لترتيب المواد الدراسية في الحصص الثلاث الأولى من جدول منال ليوم الثلاثاء، ويصعب كتابة هذه الطرائق لأنَّ عددها كبير.

أتحقَّق من فهمي

طعام: **بكم طريقة مختلفة يُمكِن لشخص اختيار وجبة غدائه المُكوَّنة من طبق رئيس واحد، وطبق مقبلات واحد، وطبق حساء واحد، من قائمة وجبة اليوم التي يُقدِّمها أحد المطاعم؟**

$5 \times 3 \times 4 = 60$

يتأثَّر العدد الكلي للنواتج المُمكِنة للتجربة العشوائية بالشروط المُحدِّدة لكيفية تنفيذ مراحلها، مثل: السماح بتكرار اختيار العناصر أو عدم السماح بذلك، وتثبيت بعض العناصر في مواضع مُعيَّنة.

مثال 3

أجد في كلٍّ من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين كلمة (ليس بالضرورة لها معنى) من 3 أحرف، مُستعمِلًا الأحرف: أ، ب، جـ، د، هـ:

1 إذا سُمِح بتكرار الأحرف في الكلمة.

ألاحِظ أنَّه يُمكِن اختيار أيٍّ من الأحرف الخمسة في كل مرحلة.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الأول
125 =	5	×	5	×	5

إذن، يُمكِن تكوين 125 كلمة.

2 إذا لم يُسمَح بتكرار الأحرف في الكلمة.

ألاحِظ أنَّ الحرف المُستعمَل في الخيار الأول لا يجوز تكراره في الخيار الثاني، وأنَّ الحرفين المُستعمَلين في الخيارين الأول والثاني لا يجوز استعمالهما في الخيار الثالث.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الأول
60 =	3	×	4	×	5

إذن، يُمكِن تكوين 60 كلمة.

أُفكِّر

لماذا نقص عدد الكلمات عند إضافة شرط (عدم السماح بالتكرار)؟

39

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة أنَّ العدد الكلي للنواتج المُمكِنة لتجربة عشوائية يتأثَّر بالشروط المفروضة على تنفيذها، ولإيجاد عدد النواتج نبدأ بالمراحل المقيدة بشروط.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، ثم أطلب إليهم تبرير سبب نقصان عدد النواتج المُمكِنة في الفرعين الثاني والثالث عن عدد النواتج في الفرع الأوَّل، مُؤكِّدًا لهم في الفرع الثالث من المثال أنَّه لا يُمكِن اختيار الحرف الأوَّل (جـ) إلّا بطريقة واحدة. وبما أنَّ التكرار غير مسموح به، فإنَّ عدد طرائق اختيار الحرف الثاني والحرف الثالث سيتأثَّر.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة كتابة تجربة عشوائية حياتية مُتعدِّدة المراحل، ومُكوَّنة من فرعين، أحدهما يحتوي شرطًا مُحدَّدًا، ثم تبرير عدد النواتج في كل فرع.

تنويع التعليم:

في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية في ظل وجود شروط مُحدَّدة على المسألة؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (7–1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

---

3 **إذا كان الحرف الأول من هذه الكلمات هو (جـ)، ولا يُسمَح بتكرار الأحرف.**

ألاحِظ أنَّه توجد طريقة واحدة لاختيار الحرف الأول (جـ).

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		
1	×	4	×	3	=	12

إذن، يُمكِن تكوين 12 كلمة.

أتحقَّق من فهمي

أجد في كلٍّ من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم مركبة مُكوَّن من 5 منازل، مُستعمِلًا الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

a) إذا سُمِح بالتكرار. $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 59049$

b) إذا لم يُسمَح بالتكرار. $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

c) إذا سُمِح بالتكرار؛ شرط وضع الرقم 9 في أول منزلة من اليسار. $1 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

شراء: ترغب حنين في شراء هاتف محمول، فذهبت إلى أحد محالِّ بيع الهواتف، ووجدت فيه 4 أنواع مختلفة من الهواتف: H, I, S, N، لكل نوع منها ثلاثة ألوان: أحمر: R، وأسود: B، وأبيض: W.

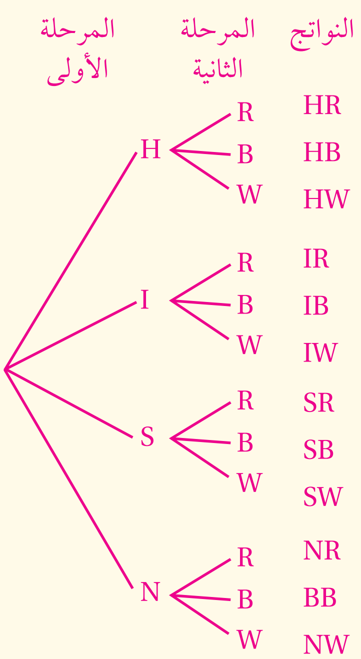
أجد عدد الطرائق المُمكِنة لشراء حنين هاتفًا محمولًا باستعمال: (3–1)، أنظر الهامش.

1 مخطط الشجرة. 2 الجدول. 3 القائمة المنظمة.

4 **طعام:** يُعِدُّ مطعمٌ البيتزا باستعمال نوعين من العجين، و8 خلطات مختلفة. إذا كان لهذه البيتزا 3 حجوم، فكم عدد الخيارات المُمكِنة لشراء بيتزا واحدة منها؟ $2 \times 8 \times 3 = 48$

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

1)



2)

	H	I	S	N
R	RH	RI	RS	RN
B	BH	BI	BS	BN
W	WH	WI	WS	WN

3)

RH RI RS RN
BH BI BS BN
WH WI WS WN

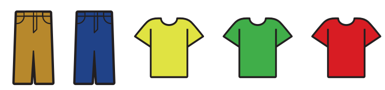
5 يشترط موقع تعليمي في شبكة الإنترنت إنشاء المُستخدِم حسابًا محميًّا بكلمة مرور تحوي 4 أحرف إنجليزية (من دون اهتمام بحجم الخط) متبوعة بعدد مُكوَّن من رقم واحد. ما عدد كلمات المرور المختلفة التي يُمكِن إنشاؤها؟ $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 = 4569760$

كرات: يحتوي صندوق على كرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة بيضاء. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين على التوالي في الحالتين الآتيتين:

6 إذا سُمِح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى. $3 \times 3 = 9$

7 إذا لم يُسمَح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى. $3 \times 2 = 6$

8 لدى حاتم ثلاثة قمصان مختلفة الألوان، وبنطالان مختلفا اللون. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار حاتم قميصًا وبنطالًا؟ $3 \times 2 = 6$



9 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). $3 \times 6 = 18$

مهارات التفكير العليا

10 تحدٍّ: يستطيع بشير استعمال 480 طريقة مختلفة لاختيار وجبة غدائه من بين المقبلات، والطبق الرئيس، والحلويات. إذا كان للمقبلات 6 خيارات، وللطبق الرئيس 10 خيارات، فما عدد الخيارات المُمكِنة للحلويات، علمًا بأنَّه اختار طبقًا واحدًا من كل صنف؟ $\frac{480}{6 \times 10} = 8$

11 تبرير: كم عددًا من 4 منازل يقبل القسمة على 5، ويُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5، إذا سُمِح بالتكرار، مُبرِّرًا إجابتي؟ $5 \times 5 \times 5 \times 1 = 125$

12 تحدٍّ: كم عددًا فرديًّا من 3 منازل يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام (0–9)، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار؟ $5 \times 8 \times 8 = 320$

41

إرشادات:

- في السؤال 5، ألفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأحرف المختارة لكلمة المرور هي باللغة الإنجليزية. ومن ثَمَّ، فإنَّ عدد الطرائق المُمكِنة يتأثَّر تبعًا للغة.
- في السؤال 12 (تبرير)، أُذكِّر الطلبة بمفهوم قابلية القسمة عامة، وبمفهوم قابلية القسمة على العدد 5 بوجه خاص، ثم أطرح عليهم مجموعة من الأسئلة تَلْفِت انتباههم إلى أنَّ الشرط في هذه المسألة هو الرقم في منزلة الآحاد.
- في السؤال 13 (تحد)، أُذكِّر الطلبة بمفهوم العدد الفردي ومفهوم العدد الزوجي.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (13–11).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 9 ,8 كتاب التمارين: (7 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (10 – 8) كتاب التمارين: (10 – 5)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (13 – 11) كتاب التمارين: 11

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - كم عددًا زوجيًّا من 4 منازل يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام (9–0)، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار؟

عدد الأعداد الزوجية التي آحادها 0 إضافةً إلى الأعداد الزوجية التي آحادها 2 أو 4 أو 6 أو 8:

$(1\times9\times8\times7) + (4\times8\times8\times7) = 2296$

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - تتسوَّق هيفاء لشراء مُتطلَّبات مدرسية. إذا أرادت أنْ تشتري واحدًا من كلٍّ ممّا يأتي: 6 حقائب مدرسية، و8 دفاتر ملاحظات، و3 حافظات أقلام، و3 أنواع من أقلام الحبر، فما عدد البدائل المختلفة المتوافرة لهيفاء؟ $6\times8\times3\times3 = 432$

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تعرُّف مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- توظيف مضروب العدد الصحيح غير السالب في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أضع في مُقدِّمة الغرفة الصفية ثلاثة مقاعد في صف واحد، ثم أطلب إلى أحد الطلبة اختيار ثلاثة من زملائه، وترتيب جلوسهم على المقاعد الثلاثة بأكبر عدد مُمكِن من الطرائق خلال دقيقة.
- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  - ◂ ما عدد الطرائق التي يُمكِن بها ترتيب جلوس الطلبة على المقاعد؟ 6 طرائق.
  - ◂ هل ترتيب جلوس الطلبة على المقاعد مُهِمٌّ؟ نعم.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

الدرس 2

مضروب العدد
Factorial

فكرة الدرس تعرُّف مضروب العدد الصحيح غير السالب، واستعماله في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات مضروب العدد.

مسألة اليوم شاركت داليا في معرض فني بـ 5 لوحات، خُصِّص لعرضها مساحة على الحائط. بكم طريقة مختلفة يُمكِنها ترتيب لوحاتها على الحائط في صفٍّ واحد بجانب بعضها؟

يُمكِن التعبير عن $3 \times 2 \times 1$ باستعمال الرمز !3 الذي يُقرَأ: مضروب (factorial) العدد ثلاثة.

مفهوم أساسي مضروب العدد

بالكلمات: مضروب العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n.

بالرموز: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$

أتعلَّم
بالتعريف، فإنَّ:
$0! = 1$
$1! = 1$

مثال 1

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

1 $6!$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف المضروب

$= 720$ الناتج

2 $(7-3)!$

$(7-3)! = 4!$ بإيجاد ناتج الطرح

$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف المضروب

$= 24$ الناتج

أُفكِّر
هل العبارة الآتية صحيحة: $(7-3)! = 7! - 3!$؟

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
  - كم لوحة لداليا في المعرض الفني؟ 5 لوحات.
  - بكم طريقة يُمكِنها اختيار اللوحة التي علَّقتها في الموقع الأوَّل من اليسار؟ بـ 5 طرائق.
  - كيف يُمكِن تحديد عدد الطرائق التي تستطيع بها داليا ترتيب اللوحات؟ باستعمال مبدأ العد الأساسي.
  - هل توجد طريقة أخرى لتحديد عدد الطرائق التي تستطيع بها داليا ترتيب اللوحات على الحائط؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق المفهوم الأساسي، وبيِّنت أنَّه يُمكِن التعبير عن حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n في صورة $n!$.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

تنبيه: قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّ $(x-y)! = x! - y!$؛ لذا أُوضِّح لهم أنَّ ذلك غير صحيح عن طريق طرح أمثلة عددية.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقَّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

مثال 2

- أُوضِّح للطلبـــة أنَّه يُمكِن اســـتعمال مضروب العدد لإيجاد عدد الطرائق اللازمة لإجراء تجربة عشـــوائية لا تتكرَّر عناصرها.
- أُناقِش الطلبـــة في حل المثال 2 علـــى اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - كـــم زيارة ترغـــب ماريّا فـــي تنظيمهـــا في عيد الأضحى؟ 3 زيارات.
  - هل يوجد تكرار في أيٍّ من هذه الزيارات؟ لا.
  - هل يُمكِن استعمال مضروب العدد لإيجاد عدد الطرائق التـــي يُمكِن بها لماريّـــا ترتيب مواعيد زياراتهـــا؟ لماذا؟ نعـــم؛ لأنَّ ماريّـــا تريد تنظيم 3 زيارات، لكلٍّ منها عدد مـــن البدائل من دون تكرار.

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّـــد المفاهيم العابـــرة للمواد حيثمـــا وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 2، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بالقِيَم الأخلاقية، بتنظيم حوار معهم عن أهمية صلة الأرحام وزيارة الأقارب.

تنويع التعليم:

توسعة:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المســـتوى فوق المتوسط كتابة تجربة عشـــوائية حياتيـــة مُتعدِّدة المراحل، ثم اســـتعمال المضروب لتحديد عدد الطرائق المُمكِنة لهذه التجربة.

3) $\frac{8!}{5!}$

$$\frac{8!}{5!}=\frac{8\times7\times6\times\cancel{5!}^{1}}{\cancel{5!}}$$ تعريف المضروب

$= 8\times7\times6$ باختصار !5 من البسط والمقام

$= 336$ الناتج

أتعلَّم

$5! = 5\times4! = 5\times24 = 120$

بوجه عام، فإنَّ:

$n!=n(n-1)!$

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $7!$ 5040   b) $(4+1)!$ 120   c) $4!+1!$ 25   d) $\frac{12!}{7!}$ 95040

يُمكِن اســـتعمال مضروب العدد لحَلِّ المسائل بدلًا من اســـتعمال مبدأ العَدِّ الأساسي الذي درسْتُه سابقًا.

مثال 2 : من الحياة

تُخطِّط ماريا لزيارة بيت جدِّها، وبيت خالها، وبيت عمِّها أول أيام عيد الأضحى المبارك. بكم طريقة يُمكِنها ترتيب مواعيد زيارتها؟

يُمكِن تحديد عدد هذه الطرائق باســـتعمال مضروب العدد 3؛ لأنَّ ماريا تريد تنظيم 3 زيارات، لكلٍّ منها عدد من البدائل من دون تكرار، فيكون عدد الطرائق مساويًا لمضروب العدد 3:

$$3! = 3\times2\times1 = 6$$

أتحقَّق من فهمي

شـــارك 7 طلبة في ســـباق، وارتدى كلٌّ منهم قميصًـــا مُرقَّمًا من 1 إلى 7، أجـــد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب وصول الطلبة إلى خط النهاية. $7! = 5040$

أتعلَّم

يُمكِنني اســـتعمال الآلة الحاســـبة لإيجاد مضروب العدد. فمثلًا، لإيجاد مضروب العدد 6، أضغط على الأزرار الآتية من اليســـار إلى اليمين:

6 ! =

يُمكِن أيضًا اســـتعمال المضروب لإيجاد عدد طرائق ترتيب عناصر مجموعة؛ ســـواء أكانت بعض العناصر مُكرَّرة أم لا.

أتذكَّر

- عـدد حـروف اللغـة العربية 28 حرفًا.
- عـدد حـروف اللغـة الإنجليزية 26 حرفًا.

مثال 3

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

1 JORDAN

ألاحِظ أنَّ كلمة (JORDAN) تحوي 6 أحرف مختلفة غير مُكرَّرة، وأنَّ عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب هذه الأحرف يساوي مضروب العدد 6:

$$6! = 720$$

إذن، يوجد 720 كلمة يُمكِن تكوينها من تراتيب مختلفة للأحرف الستة.

2 MOHAMMAD

ألاحِـظ أنَّ كلمة (MOHAMMAD) تحوي 8 أحرف، وأنَّ الحرف (M) تكرَّر ثلاث مرّات، وأنَّ الحرف (A) تكرَّر مرَّتين.

لا يُؤثِّر في الحَلِّ ترتيب الأحرف المُكرَّرة والمتشـابهة؛ لذا تسـتثنى طرائق ترتيب الأحرف المُكرَّرة عند عَـدِّ الطرائق الكلية المُمكِنة لتراتيب أحرف الكلمة، وذلك بالقسـمة على عدد طرائق ترتيب الأحرف المُكرَّرة فيها:

عدد طرائق ترتيب 8 أحرف مختلفة $8! = 40320$

عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرَّر M $3! = 6$

عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرَّر A $2! = 2$

باختصار عدد طرائق ترتيب الحرفين المُكرَّرين $\frac{8!}{(3!)\,(2!)} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3!)\,(2!)}$

$$= 3360$$

إذن، توجد 3360 طريقة لترتيب أحرف كلمة (MOHAMMAD).

معلومة

البترا (PETRA) مدينة نحتها الأنبـاط بالصخر منـذ أكثر مـن 2000 عـام، ولا يُمكِن للزائر دخولها إلّا بالسـير في السيق؛ وهو شق بين الجبال الصخرية، طولـه 1200 m تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

a) PETRA $5! = 120$

b) AMMAN $\frac{5!}{(2!)(2!)} = 30$

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن استعمال مضروب العدد أيضًا لإيجاد عدد الطرائق اللازمة لإجراء تجربة عشـوائية تتكرَّر عناصرها.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أُوضِّـح للطلبة كيفية اسـتعمال الآلة الحاسـبة لإيجاد مضروب العدد، ثم أطلب إليهم التحقُّق من صحَّة الإجابة التي تُوصِّل إليها في المثال باستعمال الآلة الحاسبة.

! تنبيه:

قد يعتقـد بعض الطلبـة خطـأً أنَّ ترتيب الأحرف المُكرَّرة والمُتشابِهة مُهِمٌّ؛ فلا يجب استثناؤها.

تنويع التعليم:

فـي المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسـط صعوبة في إيجاد عـدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف الكلمات في حال ورد فيها أحرف مُكرَّرة؛ لـذا أمنحهم بعض الوقـت، وأُقدِّم لهم أمثلة سـهلة عند اللزوم، مثـل إيجاد عدد طرائق ترتيب أحرف كلمة SOS، مُنوِّهًا إيّاهم بضـرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسـائل)، ثم أطلب إليهم حل المسـائل (1–9) ضمن مجموعات ثنائية داخـل الغرفة الصفية؛ فهذه المسـائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسـها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّـه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (13–15).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 10, 12 كتاب التمارين: (1–9)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (10–12) كتاب التمارين: (10–12)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (13–15) كتاب التمارين: (10–13)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:

◂ أكتب كُلًّا ممّا يأتي باستعمال مضروب العدد:

1) $9 \times 8 \times 7$ $\quad \frac{9!}{6!}$

2) $\frac{16 \times 15}{4 \times 3 \times 2}$ $\quad \frac{16!}{14! \times 4!}$

3) $\frac{8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3}$ $\quad \frac{8! \times 2!}{5! \times 5!}$

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◂ أجـد عدد الطرائق المُمكِنـة لترتيب أحرف كل كلمة ممّا يأتي:

1) TAFILA $\frac{6!}{2!} = 120$

2) MOHANED $7! = 5040$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $5!$ 120

2) $(18-13)!$ 120

3) $(4+3)!$ 5040

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4) $\frac{17!}{11!}$ 8910720

5) $\frac{10!}{4! \times 6!}$ 210

6) $\frac{13!}{(6!)(13-6)!}$ 1716

7) **سياحة:** يريد سائح زيارة المعالم الأثرية الآتية:
جرش، أم قيس، البحر الميت، المُدرَّج الروماني، قلعة عجلون. بكم طريقة يُمكِنه ترتيب زيارة هذه المواقع الأثرية؟ $5! = 120$

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

8) PALESTINE $\frac{9!}{2!} = 181440$

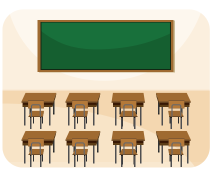
9) AJLOUN $6! = 720$

10) **زراعة:** يريد مروان زراعة 4 أشجار لوزيات من أنواع مختلفة في صفٍّ واحد بحديقة منزله. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لتنظيم زراعة هذه الأشجار. $4! = 24$

11) **مدرسة:** تريد منال حَلَّ الواجبات المدرسية للمواد الآتية:
الرياضيات، اللغة العربية، اللغة الإنجليزية، الثقافة العامة، الجغرافيا.
بكم طريقة يُمكِنها ترتيب حَلِّ هذه الواجبات؟ $5! = 120$

12) **مطالعة:** تريد داليا قراءة 9 كتب لديها. بكم طريقة يُمكِنها ترتيب قراءة هذه الكتب؟ $9! = 362880$

مهارات التفكير العليا



تحدٍّ: يوجد في صفٍّ 8 طالبات، يتعيَّن عليهنَّ الجلوس في صفين كما في الشكل المجاور:

13) أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس هؤلاء الطالبات. $8! = 40320$

14) إذا تعيَّن على نور وشمس الجلوس على مقعد إحدى الزوايا الأربع، فبكم طريقة يُمكِن أنْ تجلس طالبات الصف؟ $4 \times 3 \times 6! = 8640$

15) إذا قسَّمَتِ المعلِّمة طالبات الصف إلى مجموعتين، في كلٍّ منهما 4 طالبات، فبكم طريقة يُمكِن أنْ تجلس طالبات الصف؛ شرط أنْ تكون المقاعد الأربعة في الصف الأول للمجموعة الأولى، والمقاعد الأربعة في الصف الثاني للمجموعة الثانية؟ $4! \times 4! = 576$

إرشادات:

- في السؤال 8، أُؤكِّد للطلبة ضرورة الانتباه إلى الأحرف المُكرَّرة.
- في السؤال 14 (تحد)، أُوجِّه الطلبة إلى تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس كلٍّ من نور وشمس أوَّلًا، مُؤكِّدًا ضرورة استعمال مبدأ العد الأساسي في هذه المسألة.
- في السؤال 15 (تحد)، أُوضِّح للطلبة كيف يُمكِن إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس أفراد المجموعة الأولى وأفراد المجموعة الثانية؛ كلٌّ على حِدَة، ثم أستعمل مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس أفراد المجموعتين.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- تعرُّف التباديل.
- حساب التباديل يدويًّا، وباستعمال الآلة الحاسبة.
- توظيف التباديل في حل مسائل حياتية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما.
- إيجاد مضروب العدد الصحيح غير السالب.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أُعطي كل مجموعة 7 بطاقات، كُتِبت عليها 7 أسماء مختلفة لأشخاص.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار 3 أشخاص من بين الأشخاص السبعة؛ لتكوين لجنة ثلاثية، يكون فيها أحدهم رئيس اللجنة، والثاني مساعدًا، والثالث عضوًا في اللجنة.

الدرس 3

التباديل
Permutations

فكرة الدرس تعرُّف التباديل، واستعمالها في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات التباديل.

مسألة اليوم بكم طريقة يُمكِن لثلاث أخوات من بين خمسٍ الوقوف بجانب بعضهنَّ لتلتقط سميرة صورة لهنَّ؟

التباديل (permutations) هي الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة من الأشياء، ومراعاة ترتيب اختيار هذه الأشياء.

عدد تباديل الحرف (A): 1	A	توجد طريقة واحدة لترتيب اختيار الحرف (A).
عدد تباديل الحرفين (A, B): 2 $(2 \times 1 = 2)$	AB BA	يُمكِن اختيار الحرف (B) قبل الحرف (A)، أو بعده.
عدد تباديل الأحرف (A, B, C): 6 $(3 \times 2 \times 1 = 6)$	BAC BCA CBA ABC ACB CAB	يُمكِن اختيار الحرف (C) أولًا، أو ثانيًا، أو ثالثًا.

قد لا يَلزم أحيانًا إيجاد عدد طرائق الاختيار لعناصر المجموعة كلها. فمثلًا، إذا أردْتُ تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار لجنة مُكوَّنة من 3 أشخاص (رئيس، ومساعد، وعضو)، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص، فإنَّني أستعمل مبدأ العَدِّ الأساسي كما يأتي:

عدد طرائق اختيار عضو اللجنة		عدد طرائق اختيار مساعد اللجنة		عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة
210 = 5	×	6	×	7

إذن، يُمكِنني اختيار 3 أشخاص، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص باستعمال 210 طرائق، مُراعِيًا المُسمّى الوظيفي لكل شخص.

46

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - هل الترتيب مُهِمٌّ في اختيار هؤلاء الأشخاص؟ لماذا؟ نعم؛ لأنَّ المُسمّى الوظيفي لكلٍّ منهم مختلف.
  - كيف يمكن إيجاد عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة لتكوين اللجنة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
  - ما عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار الأشخاص الثلاثة لتكوين اللجنة؟ 210 طرائق.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
  - كم عدد الأخوات في المسألة؟ 5 أخوات.
  - كم أختًا ترغب سميرة في التقاط صورة لها؟ 3 أخوات.
  - هل ترتيب الأخـوات في الصورة مُهِمٌّ؟ لمـاذا؟ نعم؛ لأنَّه يجب عليهـن الوقوف بجانب بعضهن.
- كيف يُحدَّد عدد الطرائق التي يُمكِن بها لسـميرة التقاط صورة للأخوات الثلاث؟ باستعمال مبدأ العد الأساسي.
- هل يُمكِن تحديد عدد الطرائق التي يُمكِن بها لسـميرة التقاط صورة للأخوات الثلاث باستعمال المضروب؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في مفهوم التباديل، مُبيِّنًا لهم أنَّ المسـألة التي ذُكِـرت في بداية الحصة، وتناولت اختيار 3 أشخاص (رئيس، ومساعد، وعضو) من بين 7 أشخاص، هي مثال على مفهوم التباديل.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن اسـتعمال المضروب للإجابة عن المسـألة، وذلك بقسمة عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار 7 أشـخاص على عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الأربعة الباقين؛ أيْ إيجاد: $\frac{7!}{4!}$.
- أُبيِّن للطلبة أنَّه يُمكِن تعميم النتيجة السابقة في صورة قانون، ثم أُقدِّم لهم القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي)؛ لإيجاد عدد تباديل n من العناصر، أُخِذ منها r عنصرًا كل مَرَّة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

يُمكِنني أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الثلاثة، وذلك بإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص السبعة جميعًا وترتيبهم، ثم اختصار عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الأربعة الباقين باستعمال القسمة كما يأتي:

$$\frac{\text{طرائق اختيار 7 أشخاص}}{\text{طرائق اختيار 4 أشخاص}} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

يُمكِن تعميم هذه النتيجة في صورة قانون.

مفهوم أساسي — التباديل

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر، أُخِذ منها r عنصرًا كل مرَّة، هو:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \le n$.

فمثلاً، عدد تباديل 5 عناصر، أُخِذ منها 3 عناصر كل مرَّة، هو:

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرمزين الآتيين للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة: nPr , $P(n,r)$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) ${}_{10}P_4$

$${}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!}$$ تعريف التباديل

$$= \frac{(10)\,(9)\,(8)\,(7)\,(\cancel{6!})^{1}}{\cancel{6!}}$$ باختصار !6 من البسط والمقام

$$= 5040$$ بالضرب

أتعلَّم

ألاحِظ أنَّ: ${}_{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$، أيْ إنَّ الضرب يبدأ من 10 نزولاً 4 مرّات.

بوجه عام، فإنَّ:

${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

47

إرشادات:

- أُناقِش الطلبة في الرموز المُستعمَلة للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذ منها r عنصرًا كل مـرَّة، وورد ذكرها في صندوق (رموز رياضية)، مُبيِّنًا لهم أنَّ الرمز ${}_nP_r$ هو الأكثر استعمالًا في الكتاب.
- أُناقِش الطلبة في القواعد التي ورد ذكرها في صندوق (أتعلَّم) في الصفحة 48 من كتاب الطالب؛ لِما لها من أهمية في حل الأسئلة الواردة في بند (أتحقَّق من فهمي)، وبند (أتدرَّب وأحل المسائل).

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّه يُمكِن استعمال قانون التباديل لأيِّ أعداد؛ لذا أُؤكِّد لهم ضرورة الالتزام بالشروط التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي).

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقَّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أوضِّح للطلبة أهمية استعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مُهِمًّا، ثم أطلب إليهم ذكر أمثلة على ذلك.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - هل الترتيب مُهِمٌّ في هذه المسألة؟ لماذا؟ نعم؛ لأنَّ لكل شخص وظيفة مُحدَّدة.
  - هل يُمكِن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار؟ إذا كان الجواب بالإيجاب، فكيف ذلك؟ نعم، $4 \times 3 = 12$
  - هل يُمكِن استعمال التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار؟ إذا كان الجواب بالإيجاب، فكيف ذلك؟ نعم، ${}_4P_2$.
- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد ناتج ${}_4P_2$ على اللوح، مُقدِّمًا له التغذية الراجعة اللازمة.
- أُوضِّح للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد تباديل n من العناصر التي أُخِذ منها r عنصرًا كل مرَّة، ثم أطلب إليهم التحقُّق من صحَّة الإجابة التي تُوصِّل إليها في المثال باستعمال الآلة الحاسبة.

إرشاد: أُؤكِّد للطلبة أنَّ الإجابة هي نفسها في حال استعمال الطرائق المختلفة؛ لذا أحثُّهم على حل الأمثلة والأسئلة الواردة في الدرس بأكثر من طريقة إنْ أمكن.

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 2، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي الطلبة بأهمية المشاركة في الأنشطة المدرسية، مثل الإذاعة المدرسية؛ لِما لها من أثر في بناء الشخصية وصقلها.

---

2) $\dfrac{{}_{12}P_7}{{}_9P_4}$

$$\frac{{}_{12}P_7}{{}_9P_4} = \frac{12!}{(12-7)!} \times \frac{(9-4)!}{9!}$$ تعريف التباديل

$$= \frac{12!}{5!} \times \frac{5!}{9!}$$ بإيجاد ناتج الطرح

$$= \frac{(12)(11)(10)(\cancel{9!})^{1}}{\cancel{9!}}$$ باختصار !9 من البسط والمقام

$$= 1320$$ الناتج

أتعلَّم

$nPn=n!$

$nP1=n$

$nP0=1$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) ${}_5P_5$ 120

b) $\dfrac{{}_{13}P_3}{{}_{13}P_1}$ 132

يُمكِن إيجاد عدد طرائق الاختيار باستعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مهمًّا، مثل عدد طرائق ترتيب الجلوس على مقاعد لعدد من الأشخاص، أو عدد طرائق ترتيب مجموعة من الكتب المختلفة على رفٍّ.

يُعَدُّ استعمال التباديل طريقة سهلة، مقارنةً بالطرائق التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل: مبدأ العَدِّ الأساسي، ومخطط الشجرة، والجدول، والقوائم المنظمة.

مثال 2

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار طالبينِ عشوائيًّا من الطلاب: محمود، وعلي، وحسن، ومعتز، وتعيين الأول مسؤولًا عن الإذاعة المدرسية، وتعيين الثاني رئيسًا لمجلس الطلبة.

أستعمل الجدول لحصر الخيارات المُمكِنة جميعها على النحو الآتي:

مسؤول الإذاعة المدرسية \ رئيس مجلس الطلبة	معتز	حسن	علي	محمود
محمود	(محمود، معتز)	(محمود، حسن)	(محمود، علي)	
علي	(علي، معتز)	(علي، حسن)		(علي، محمود)
حسن	(حسن، معتز)		(حسن، علي)	(حسن، محمود)
معتز		(معتز، حسن)	(معتز، علي)	(معتز، محمود)

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فالاختيار (علي، حسن) يعني أنَّ عليًّا هو مسؤول الإذاعة، وأنَّ حسنًا هو رئيس مجلس الطلبة. أمّا الاختيار (حسن، علي) فيعني أنَّ حسنًا هو مسؤول الإذاعة، وأنَّ عليًّا هو رئيس مجلس الطلبة.

بناءً على الجدول، يُمكِنني عَدُّ الخيارات المختلفة لتحديد عدد طرائق الاختيار، وهو 12

يُمكِنني أيضًا استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار، حيث:

	عدد طرائق اختيار رئيس مجلس الطلبة		عدد طرائق اختيار مسؤول الإذاعة المدرسية
12 =	3	×	4

أو استعمال التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار.

أريد اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مُراعِيًا الترتيب:

قانون التباديل $\quad {}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$

الناتج $\quad =12$

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل. فمثلًا، لإيجاد ناتج ${}_4P_2$، أضغط على الأزرار الآتية:

4 nPr 2 =

أتحقَّق من فهمي

بكم طريقة يُمكِن أنْ تختار سلمى وروان ورزان 3 عيِّنات عشوائيًّا من بين 5 عيِّنات مختلفة متوافرة في مختبر العلوم لفحصها بالمجهر الضوئي؟ ${}_5P_3 = 60$

أُفكِّر

هل الترتيب مهم في مسألة (أتحقَّق من فهمي) المجاورة؟ لماذا؟

تنويع التعليم:

في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد تفسير للمسائل الحياتية، ومعرفة إذا كان حلها باستعمال التباديل أم لا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة أهمية استعمال التباديل في التجارب التي تتطلَّب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائيًّا من بين مجموعة عناصر؛ لأنَّ ذلك يضمن تلقائيًّا منح كل عنصر أهمية الترتيب.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أطلب إلى الطلبة استعمال الآلة الحاسبة للتحقُّق من صحَّة الإجابة التي تُوصِّل إليها في المثال.

إرشاد: أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال باستعمال مبدأ العد الأساسي، ثم مقارنة الإجابتين معًا.

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّ ترتيب الأحرف غير مُهِمٍّ؛ لذا أُؤكِّد لهم أنَّ الترتيب مُهِمٌّ؛ لأنَّ تغيير ترتيب الأحرف يُغيِّر الكلمة ومعناها.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن رموز رياضية أخرى تُستعمَل للتعبير عن التباديل.

مثال إضافي:

كم عددًا مختلفًا من 4 منازل يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام (9–1)، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار؟

$$_9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (9–1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

يُمكِن استعمال التباديل أيضًا في التجارب التي تتطلَّب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائيًّا من بين مجموعة عناصر؛ لأنَّ ذلك يمنح كل عنصر أهمية في الترتيب.

مثال 3

أجد عدد الكلمات الثلاثية (ليس بالضرورة لها معنى) التي يُمكِن تكوينها من حروف اللغة العربية، بحيث لا تحوي أيُّ كلمةٍ أحرفًا مُكرَّرةً.

عدد حروف اللغة العربية 28 حرفًا. ولأنَّ التكرار غير مسموح به؛ فإنَّ ترتيب الحروف مهم.

إذن، يُمكِن استعمال التباديل لتحديد عدد طرائق اختيار 3 أحرف من بين 28 حرفًا:

$_{28}P_3 = \frac{28!}{(28-3)!}$ قانون التباديل

$= 19656$ الناتج باستعمال الآلة الحاسبة

أيْ يُمكِن تكوين 19656 كلمة تتألَّف كُلٌّ منها من 3 أحرف.

معلومة

معظم مفردات اللغة العربية أصلها ثلاثي، فرباعي، فخماسي.

أتحقَّق من فهمي

أجد عدد الكلمات الخماسية (ليس بالضرورة لها معنى) التي يُمكِن تكوينها من حروف اللغة الإنجليزية، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار. $_{26}P_5 = 7893600$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $_9P_5$ 15120
2) $_7P_0$ 1
3) $_{99}P_2$ 9702

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4) $\frac{_{10}P_3}{_8P_2}$ $\frac{90}{7}$
5) $(_{13}P_9)-(_7P_4)$ 259458360
6) $(_7P_3)\times(_4P_3)$ 5040

7) مقاعد: أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس شخصين على 5 مقاعد موضوعة في صفٍّ واحد. $_5P_2 = 20$

8 **محاضرات:** اعتمدت فيحاء جدولها الدراسي للفصل الأول في الجامعة، بحيث اختارت 4 مواد من بين 12 مادة مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب فيحاء مواد جدولها الدراسي. $_{12}P_4 = 11880$

9 **سياحة:** أعلنت شركة سياحية عن وجود رحلات إلى 8 مدن مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار شخص رحلتين إلى مدينتين مختلفتين، بحيث يسافر إلى الأولى للتجارة، ويسافر إلى الثانية للاستجمام. $_8P_2 = 56$

10 **رياضة:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاصطفاف 5 طلبة بجانب بعضهم قبيل انطلاقهم في مسابقة الجري. $_5P_5 = 120$

11 **ترقيم:** أجد عدد المنازل التي يُمكِن ترقيمها باستعمال رموز تحوي 3 أرقام من 1 إلى 9؛ شرط ألّا يحتوي رمز أيِّ منزل على رقم مُكرَّر. $_9P_3 = 504$

12 **مقاعد:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس 6 طلبة على 6 مقاعد رُتِّبت في صفٍّ واحد. $_6P_6 = 720$

13 **كتب:** لدى طلال 4 كتب رياضيات (M)، و3 كتب لغة إنجليزية (E). أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب الكتب السبعة على الشكل:

$M\ E\ M\ E\ M\ E\ M$ $\quad {_4P_4} \times {_3P_3} = 144$

14 **مركبات:** تقف سبع سيّارات في انتظار دورها للفحص أمام مركز مُتخصِّص لصيانة السيّارات، بما في ذلك سيّارتا فؤاد وغيث. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاصطفاف سيّارتي فؤاد وغيث في الدور. $_7P_2 = 42$

مهارات التفكير العليا

15 **تحدٍّ:** أجد قيمة r إذا كان $_{10}P_r = 5040$.

$$\frac{10!}{(10-r)!} = 5040$$
$$(10-r)! = 720$$
$$(10-r)! = 6!$$
$$10-r = 6$$
$$r = 4$$

16 **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ $_nP_n = n!$.

$$_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

إرشاد: في السؤال 15 (تحد)، أُوجِّه الطلبة إلى استعمال خواص مضروب العدد أثناء الحل؛ للاختصار، وتبسيط الحل؛ لإيجاد قيمة r.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 15 والمسألة 16.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (10–12) كتاب التمارين: (1–7)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 13, 14 كتاب التمارين: (8–11)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (14–16) كتاب التمارين: (11–13)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - أجد قيمة n في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $_nP_3 = 10 \times {_nP_2}$ $\quad n = 12$

2) $_nP_2 = 42$ $\quad n = 7$

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - بكم طريقة يستطيع 6 أشخاص الجلوس على 10 مقاعد مُرتَّبة في صف واحد؟ $_{10}P_6 = 151200$

الدرس 4

نتاجات الدرس

- تعرُّف التوافيق.
- حساب التوافيق يدويًّا، وباستعمال الآلة الحاسبة.
- توظيف التوافيق في حل مسائل حياتية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما.
- إيجاد مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- توظيف التباديل في إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإنجاز عمل ما.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أُعطي كل مجموعة 7 بطاقات، كُتِبت عليها 7 أسماء مختلفة لأشخاص.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار 3 أشخاص من بين الأشخاص السبعة؛ لتكوين لجنة ثلاثية.

الدرس 4

التوافيق

Combinations

فكرة الدرس تعرُّف التوافيق، واستعمالها في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات التوافيق.

مسألة اليوم نظَّمت الملكية الأردنية 12 رحلة إلى بعض الدول العربية في يوم واحد من مطار الملكة علياء وإليه. بكم طريقة يُمكِن اختيار 3 رحلات منها عشوائيًّا من دون اهتمام بترتيب عملية انطلاقها؟

قد لا يكون مهمًّا ترتيب العناصر المختارة عشوائيًّا في بعض المواقف. فمثلًا، اختيار شخصين a و b لتشكيل لجنة من مجموعة فيها n من الأشخاص، لا يتطلَّب اهتمامًا بالترتيب؛ لأنَّ الترتيب ab هو نفسه الترتيب ba ضمن اللجنة.

لكي أجد عدد طرائق الاختيار المُمكِنة في هذه الحالة؛ أَقسِم $_nP_2$ على $2!$، مُهمِلًا التكرار، في ما يُعرَف **بالتوافيق** (combinations).

مفهوم أساسي **التوافيق**

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر، أُخِذ منها r عنصرًا كل مرَّة، هو:

$$_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \le n$.

مثال: عدد توافيق 7 عناصر، أُخِذ منها 3 عناصر كل مرَّة، هو:

$$_7C_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرموز الآتية للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

$nCr, C(n, r), \binom{n}{r}$

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - هل الترتيب مُهِمٌّ في اختيار الأشخاص الثلاثة؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّه لا يوجد مُسمّى وظيفي لكلٍّ منهم، فمثلًا لا يوجد فرق بين اختيار أحمد وعلي وفاطمة، واختيار أحمد وفاطمة وعلي.
  - هل يُمكِن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار 3 أشخاص من بين الأشخاص السبعة؛ لتكوين لجنة ثلاثية؟
  - ما عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار الأشخاص الثلاثة لتكوين اللجنة؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤالين السابقين في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
  - كم رحلة نظَّمت الملكية الأردنية في ذلك اليوم؟ 12 رحلة.
  - هل يُمكِن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار 3 رحلات ما من دون اهتمام بترتيب عملية انطلاقها؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ مبدأ العد الأساسي يهتم بالترتيب.
  - هل يُمكِن استعمال مفهوم التباديل لإيجاد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار 3 رحلات ما من دون اهتمام بترتيب عملية انطلاقها؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ التباديل هي الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة من الأشياء، مع مراعاة ترتيبها.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن معلومات تتعلَّق بالملكية الأردنية، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

3 التدريس

مثال 1

- أُناقِش الطلبة في مفهوم التوافيق، مُبيِّنًا لهم أنَّ المسألة التي ذُكِرت في بداية الحصة، وتناولت اختيار 3 أشخاص من بين 7 أشخاص من دون اهتمام بالترتيب، هي مثال على مفهوم التوافيق.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن الإجابة عن المسألة بإيجاد تباديل 7 أشخاص، اختير منهم 3 أشخاص عشوائيًّا، ثم حذف النواتج المُكرَّرة؛ لأنَّ الترتيب في التوافيق غير مُهِمٍّ.
- أُبيِّن للطلبة أنَّه يُمكِن تعميم النتيجة السابقة في صورة قانون، ثم أُقدِّم لهم القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي)؛ لإيجاد عدد توافيق n من العناصر، أُخِذ منها r عنصرًا كل مَرَّة.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أُوضِّح للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد توافيق n من العناصر التي أُخِذ منها r عنصرًا كل مَرَّة، ثم أطلب إليهم التحقُّق من صحَّة الإجابة التي تُوصِّل إليها في المثال باستعمال الآلة الحاسبة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

إرشادات:

- أُناقِش الطلبة في الرموز المُستعمَلة للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخِذ منها r عنصرًا كل مَرَّة، وورد ذكرها في صندوق (رموز رياضية)، مُبيِّنًا لهم أنَّ الرمز $_nC_r$ هو الأكثر استعمالًا في الكتاب.
- أُناقِش الطلبة في القواعد التي ورد ذكرها في صندوق (أتعلَّم) في الصفحة 53 من كتاب الطالب؛ لِما لها من أهمية في حل الأسئلة الواردة في بند (أتحقَّق من فهمي)، وبند (أتدرَّب وأحل المسائل).

تنبيـه: قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّه يُمكِن استعمال قانون التوافيق لأيِّ أعداد؛ لذا أُؤكِّد لهم ضرورة الالتزام بالشروط التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي).

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقَّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة أهمية استعمال التوافيق في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب غير مُهِمٍّ، ثم أطلب إليهم ذكر أمثلة على ذلك.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - كم طالبًا مُرشَّحًا للعب في فريق كرة القدم؟ 4 طلبة.
  - كم طالبًا يراد اختياره للعب في فريق كرة القدم الذي يُمثِّل المدرسة؟ اثنان من الطلبة.
  - هل الترتيب مُهِمٌّ في اختيار الطالبين؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّه لا توجد وظيفة مُحدَّدة لأيٍّ منهما.
  - أيُّ الآتية يُمكِن استعماله لإيجاد عدد طرائق اختيار الطالبين: مبدأ العد الأساسي، أم التباديل، أم التوافيق؟ أُبرِّر إجابتي. يُمكِن استعمال التوافيق لذلك؛ لأنَّ الترتيب غير مُهِمٍّ في هذه المسألة.
- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار اللاعبينَ على اللوح، مُقدِّمًا له التغذية الراجعة اللازمة.

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $({}_{10}C_7) - ({}_8C_3)$

$({}_{10}C_7) - ({}_8C_3) = \frac{10!}{7!(10-7)!} - \frac{8!}{3!(8-3)!}$ تعريف التوافيق

$= 120 - 56$ بحساب التوافيق

$= 64$ الناتج

2 $({}_9C_6) \times ({}_6C_2)$

$({}_9C_6) \times ({}_6C_2) = \frac{9!}{6!(9-6)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!}$ تعريف التوافيق

$= (84)(15)$ بحساب التوافيق

$= 1260$ الناتج

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلًا، لإيجاد ناتج ${}_{10}C_7$، أضغط على الأزرار الآتية:

10 nCr 7 =

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $({}_{13}C_5) - ({}_8C_8)$ 1286

b) $({}_7C_0) \times ({}_7C_7)$ 1

أتعلَّم

$nCo = 1$

$nC1 = n$

$nCn = 1$

إذا لم يكن مهمًّا ترتيب العناصر المختارة في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق التي تُختار بها تلك العناصر.

مثال 2

أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار طالبينِ من بين 4 طلاب مُترشِّحين (علاء، فريد، يونس، ربيع) للعب في فريق كرة القدم الذي يُمثِّل المدرسة.

يُمكِنني استعمال القائمة المنظمة لإيجاد عدد طرائق اختيار الطالبينِ على النحو الآتي:

(علاء، فريد)، (علاء، يونس)، (علاء، ربيع)، (فريد، يونس)، (فريد، ربيع)، (يونس، ربيع).

إذن، توجد 6 طرائق لاختيار طالبينِ من بين المُترشِّحين الأربعة.

إرشـاد: أطلب إلى الطلبة استعمال الآلة الحاسبة للتحقُّق من صحَّة الحل.

نظرًا إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، وعدم وجود فرق في الاختيار بين (علاء، فريد) و(فريد، علاء)؛ أستعمل التوافيق لإيجاد عدد طرائق اختيار طالبينِ من بين المُترشِّحين الأربعة على النحو الآتي:

تعريف التوافيق	${}_4C_2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!}$
الناتج	$= 6$

أتحقَّق من فهمي

أجد عدد طرائق اختيار لجنةٍ تُنظِّم عملية دخول طالبات مدرسة، وتضم 3 طالبات من بين 10 طالبات تطوَّعْنَ لأداء هذه المهمة. ${}_{10}C_3 = 120$

يُمكِن استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، والتباديل، والتوافيق في المواقف التي تتطلَّب إيجاد عدد العناصر المُمكِنة للفضاء العيني لتجربة عشوائية، أو إيجاد عدد العناصر التي يتكوَّن منها حادث مُعيَّن في تلك التجربة، حيث يكون عدد العناصر هو عدد طرائق الاختيار ضمن شروط مُحدَّدة.

مثال 3

يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء مُرقَّمة من (5 - 1)، و4 كرات زرقاء مُرقَّمة من (4 - 1)، علمًا بأنَّ جميع الكرات مُتماثِلة:

1 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب 3 كرات حمراء عشوائيًّا من الصندوق إذا سُحِبت الكرات دفعةً واحدةً.

أفترض أنَّ $n(A)$ هو عدد الطرائق التي يُمكِن بها سحب 3 كرات حمراء، علمًا بأنَّ العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5 كرات، وترتيب سحب الكرات ليس مهمًّا:

عدد طرائق سحب 3 عناصر من بين 5 عناصر	$n(A) = {}_5C_3$
بالتعويض في قانون التوافيق	$= \dfrac{5!}{3! \times (5-3)!}$
بإيجاد ناتج الطرح	$= \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!}$
الناتج	$= 10$

أتعلَّم

إذا رمزْتُ إلى الكرة الحمراء بالحرف R، فإنَّ النواتج المُمكِنة لتجربة سحب 3 كرات حمراء هي:

$(R1,R2,R3),(R1,R2,R4)$
$(R1,R2,R5),(R1,R3,R4)$
$(R1,R3,R5),(R1,R4,R5)$
$(R2,R3,R4),(R2,R3,R5)$
$(R2,R4,R5),(R3,R4,R5)$

تنويع التعليم:

- في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد تفسير للمسائل الحياتية، ومعرفة إذا كان حلها باستعمال التوافيق أم لا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة مسألة حياتية يُمكِن حلها باستعمال التباديل، ومسألة حياتية أخرى يُمكِن حلها باستعمال التوافيق.

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة أنَّ بعض المسائل تتطلَّب استعمال مبدأ العد الأساسي، والتباديل، والتوافيق، وَفقًا للشرط المُحدَّد في المسألة.
- أُناقِش الطلبة في حل سؤال الفرع 1 من المثال 3 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل، ومُبيِّنًا لهم أنَّ جملة (إذا سُحِبت الكرات دفعة واحدة) تُعَدُّ شرطًا يدلُّ على أنَّ الترتيب غير مُهِمٍّ؛ لذا يَلزم استعمال التوافيق في هذه الحالة.
- أُناقِش الطلبة في حل سؤال الفرع 2 من المثال 3 على اللوح، ثم أطلب إليهم تقديم تبرير منطقي لعدم إمكانية استعمال التوافيق لحل هذا السؤال، لافتًا انتباههم إلى الخيارات المُمكِنة لترتيب ظهور الكرات، وهي: ظهور كرتين حمراوين أوَّلًا، ثم ظهور كرة زرقاء، وظهور كرة زرقاء، ثم ظهور كرتين حمراوين، وظهور كرة حمراء، يليها ظهور كرة زرقاء، فكرة حمراء.
- أُنبِّه الطلبة أنَّه يَلزم التعبير عن حرف (أو) برمز الجمع عند إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة في هذا السؤال.
- أطلب إلى الطلبة استعمال الآلة الحاسبة للتحقُّق من صحَّة الإجابة التي تُوصِّل إليها في كل فرع من فرعي المثال.

2) أجد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء عشوائيًّا من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.

أفترض أنَّ $n(B)$ هو عدد الطرائق التي يُمكِن بها سحب كرتين حمراوين وكرة زرقاء.

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة. فمثلًا، سحب الكرات (حمراء 1، حمراء 2، زرقاء 3) يختلف عن سحب الكرات (حمراء 1، زرقاء 3، حمراء 2)، (زرقاء 3، حمراء 1، حمراء 2)، (حمراء 2، حمراء 1، زرقاء3)، (حمراء 2، زرقاء 3، حمراء 1)، (زرقاء 3، حمراء 2، حمراء 1). أُلاحِظ أيضًا أنَّ العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5 كرات، وأنَّ العدد الكلي للكرات الزرقاء في الصندوق 4 كرات:

باستعمال مبدأ العد الأساسي والتباديل

$$n(B) = {}_5P_2 \times {}_4P_1 + {}_5P_1 \times {}_4P_1 \times {}_4P_1 + {}_4P_1 \times {}_5P_2$$

بالتعويض في قانون التباديل

$$= \frac{5!}{(5-2)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{5!}{(5-2)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{4!}{(4-1)!}$$

بالتبسيط

$$= 240$$

أتعلَّم

أستعمل مبدأ العَدّ الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء.

أتحقَّق من فهمي

مُعتمِدًا المثال 3، أجد ما يأتي:

a) عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين زرقاوين عشوائيًّا من الصندوق إذا سُحِبتا معًا. ${}_4C_2 = 6$

b) عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء عشوائيًّا من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع. $({}_4P_2)({}_5P_1)+{}_4P_1\times{}_5P_1\times{}_3P_1+{}_5P_1\times{}_4P_2 = 180$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) ${}_{10}C_7$ 120

2) ${}_9C_0$ 1

3) ${}_7C_1 + {}_6C_3$ 27

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4) $({}_{12}C_5)\times({}_5C_3)$ 7920

5) $\frac{{}_{10}C_6}{{}_8C_5}$ $\frac{15}{4}$

6) $\frac{{}_9C_5}{({}_8C_5)\times({}_3C_2)}$ $\frac{3}{4}$

إرشاد: أطلب إلى الطلبة إعادة حل سؤال الفرع 2 من المثال 3 بطريقة أخرى، ثم مقارنة الإجابتين معًا.

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّه توجد للفرع 2 من المثال 3 حالة واحدة فقط، هي: ظهور كرتين حمراوين، ثم ظهور كرة زرقاء؛ لذا أُوضِّح لهم أنَّ هذه الحالة تُمثِّل أحد الخيارات المُمكِنة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن رموز رياضية أخرى تُستعمَل للتعبير عن التوافيق.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–8) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند **(أتدرَّب وأحل المسائل)**، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

7 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار نوعي فاكهة من 7 أنواع مختلفة متوافرة في محل لبيع الفواكه. $_7C_2 = 21$

8 لدى قيس 8 كتب مختلفة، أراد إهداء 3 كتب منها إلى مكتبة المدرسة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الكتب التي يرغب قيس في إهدائها. $_8C_3 = 56$

رياضة: يريد معلِّم التربية الرياضية اختيار طالبينِ من بين 15 طالبًا للمشاركة في المباريات المدرسية:

9 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هذين الطالبين. $_{15}C_2 = 105$

10 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هذين الطالبينِ للمشاركة في المباريات، علمًا بأنَّ الأول سيشارك في مباراة كرة القدم، والثاني سيشارك في مباراة كرة السلَّة. $_{15}P_2 = 210$

11 هدايا: تريد إيمان شراء باقة ورد لأمها من أحد محالِّ بيع الورد. بكم طريقة يُمكِن لإيمان شراء باقة فيها 5 وردات من بين 9 وردات ألوانها مختلفة؟ $_9C_5 = 126$

12 أجد عدد الطرائق المُمكِنة التي يريد بها سمير شراء 4 أقلام من بين 10 أقلام مختلفة. $_{10}C_4 = 210$

مهارات التفكير العليا

13 أكتشف الخطأ: وجد كلٌّ من سعيد وهمام عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار 3 طلبة في الصف من بين 11 طالبًا للمشاركة في مشروع تصميم مُخطَّط هندسي لمدرستهم. أيُّهما إجابته صحيحة؟

سعيد	همام
$_{11}C_3$	$_{11}P_3$

إجابة سعيد هي الصحيحة؛ لأنَّ ترتيب الطلبة غير مُهِمٍّ.

14 تبرير: هل يُمكِن أنْ يكون $_nP_r = {}_nC_r$، حيث: n,r عددان صحيحان موجبان، و $r \le n$؟ أُبرِّر إجابتي.

$$_nP_r = {}_nC_r$$
$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$1 = \frac{1}{r!}$$
$$r = 0, 1$$

15 تحدٍّ: إذا كان $_{10}C_7 = {}_{10}C_3$، فأجد صيغة عامة لهذه العلاقة. $_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$

56

إرشادات:

- في السؤال 13 (أكتشف الخطأ)، أُوجِّه الطلبة إلى بيان إذا كان الترتيب مُهِمًّا في المسألة أم لا؛ لتحديد أيُّهما حله صحيح: سعيد أم همام.
- في السؤال 14 (تبرير)، أطلب إلى الطلبة كتابة قانون التباديل وقانون التوافيق في المعادلة المعطاة، ثم حل المعادلة الناتجة من التعويض.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 13).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 9, 10, 13 كتاب التمارين: (1–6)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (11–13) كتاب التمارين: (7–10)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (13–15) كتاب التمارين: (9–12)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - أجد قيمة n في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $_nC_3 = 26n$ $\quad n = 14$

2) $_nC_5 = {}_nC_7$ $\quad n = 12$

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - بكم طريقة يُمكِن اختيار فريق كرة سلَّة يضم 5 لاعبينَ من بين 8 لاعبينَ؟ $_8C_5 = 56$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 ناتج $_7C_6$ هو:

a) 1　b) 6　c) 7　d) 42

2 ناتج $_9P_1$ هو:

a) 1　b) 9　c) 18　d) 27

3 ناتج $_nC_n$، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

a) 1　b) n　c) $2n$　d) n^2

4 ناتج $_nP_1$، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

a) 1　b) n
c) $2n$　d) n^2

5 **زراعة:** في محل أشتال 6 ألوان مختلفة من الورد الجوري، و4 ألوان مختلفة من ورد القرنفل. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لشراء شتلة واحدة من الورد الجوري، وشتلة واحدة من ورد القرنفل. $6 \times 4 = 24$

6 **بناء:** في محل 25 نوعًا مختلفًا من بلاط الأرضيات، و36 نوعًا من بلاط الجدران. بكم طريقة يُمكِن لمصطفى اختيار بلاط الأرضيات والجدران لمطبخ منزله؟ $25 \times 36 = 900$

7 **مدرسة:** يراد اختيار طالبينِ من بين 5 طلاب من المرحلة الأساسية، و4 طلاب من بين 6 طلاب من المرحلة الثانوية؛ للمشاركة في نشاط مدرسي. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هؤلاء الطلبة.
$(_5C_2)(_6C_4) = 150$

8 **تمريض:** يراد اختيار فريق تمريض يتألَّف من 3 مُمرِّضين من بين 7 مُمرِّضين، و 5 مُمرِّضات من بين 10 مُمرِّضات. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار أفراد هذا الفريق. $(_7C_3)(_{10}C_5) = 8820$

تدريب على الاختبارات الدولية

9 رُسِمت 8 نقاط على دائرة. عدد المثلثات التي يُمكِن تكوينها من النقاط، بحيث تُمثِّل كل 3 نقاط رؤوس المثلث، هو:

a) 40320　b) 336
c) 56　d) 8

10 يراد تكوين رقم سري من 3 منازل باستعمال الأرقام (0 – 9). عدد الأرقام التي يُمكِن تكوينها من دون تكرار هو:

a) 720　b) 120
c) 3628800　d) 648

11 لقوس قزح 7 ألوان. عدد الطرائق التي يُمكِن أنْ يظهر فيها ترتيب ألوان قوس قزح، بافتراض أنَّه يُمكِن إعادة ترتيب الألوان، هو:

a) 1　b) 7
c) 49　d) 5040

57

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (4–1) فرديًّا، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُناقِشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (8–5)، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُحدِّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

إرشادات:

- أُذكِّر الطلبة بقوانين التوافيق والتباديل قبل البدء بحل الأسئلة (4–1).
- في السؤال 8، أُذكِّر الطلبة بضرورة الانتباه إلى مسألة الترتيب، وإذا كان الترتيب مُهِمًّا أم لا؛ لأنَّ ذلك يساعد على تحديد طريقة الحل.

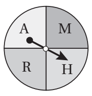
تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فرديًّا، ثم أُناقِشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبيِّنًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.

كتاب التمارين

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

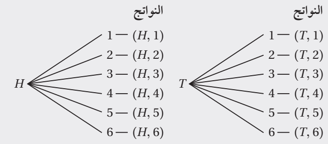
استعمال مخطط الشجرة لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)



1 أستعمل مخطّط الشجرة لتحديد الفضاء العينيّ لتجربة تدوير مؤشّر القرص المجاور مرّتين عشوائيًّا.
(2 – 1)، أنظر ملحق الإجابات.

2 أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي قطعتي نقود متمايزتين مرَّة واحدة، باستعمال مخطط الشجرة.

مثال: أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي قطعة نقود وحجر نرد مرَّة واحدة، باستعمال مخطط الشجرة.



إذن، عدد النواتج المُمكِنة هو 12 ناتجًا.

استعمال الجدول لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية (الدرس 2)

سُحبَت كرتان عشوائيًّا على التّوالي مع الإرجاع من كيس يحتوي ثلاث كرات متماثلة ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أخضر (G).

	R	B	G
R	R, R	R, B	R, G
B			
G			

أنظر ملحق الإجابات.

3 أكمل الجدول المجاور، ثمّ أحدّد الفضاء العينيّ للتجربة.

4 أجد عدد عناصر الفضاء العينيّ. أنظر ملحق الإجابات.

5 أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة سحب كرتين عشوائيًّا، الواحدة تلو الأُخرى من دون إرجاع، من صندوق يحوي كرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة سوداء، باستعمال الجدول. 6

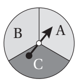
6 أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي قطعة نقود مرَّتين، باستعمال الجدول. 4

مثال: أجد عدد النواتج المُمكِنة في تجربة رمي حجري نرد متمايزين مرَّة واحدة، باستعمال الجدول.

الحجر الأول / الحجر الثاني	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

إذن، عدد النواتج المُمكِنة هو 36 ناتجًا.

استعمال مخطط الاحتمال لعد النواتج الممكنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)

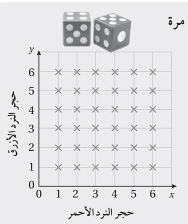


7 قرص دائري مقسَّم إلى 3 قطاعات متطابقة كتبت عليها الأحرف A, B, C كما في الشكل المجاور.
أستعمل مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة تدوير مؤشر القرص مرتين عشوائيًّا.
(7–9)، أنظر ملحق الإجابات.

8 أستعمل مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعة نقد وحجر نرد مرة واحدة عشوائيًّا.

9 سُحِبَت كرتان عشوائيًّا على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي الكرات الأربع المتماثلة المجاورة. أستعمل مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني.

مثال: أستعمل مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي حجرَي مرة واحدة عشوائيًّا أحدهما لونه أحمر والآخَر لونه أزرق.



أرسم محورَين، وأسجل على أحدهما نواتج رمي حجر النرد الأحمر، وعلى المحور الآخَر نواتج رمي حجر النرد الأزرق، كما في الشكل المجاور، حيث يمثل تقاطع خطوط مخطط الاحتمال الفضاء العيني للتجربة.

إذن، الفضاء العيني لهذه التجربة فيه 36 عنصرًا.

حل مسائل حياتية باستعمال مخطط الشجرة أو الجدول أو مخطط الاحتمال (الدرس 1)

وحدة تخزين: يرغب يوسف في شراء مشغّل (مقاطع صوتية)، ولديه 4 سعات مختلفة بالجيجابايت 2GB, 4GB, 8GB, 16GB، ويمكنه الاختيار من 5 ألوان مختلفة: الفضي، والأخضر، والأزرق، والزهري، والأسود:

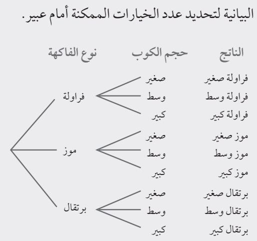
10 أستعمل الجدول لتحديد جميع البدائل الممكنة ليوسف عند اختيار المشغّل. أنظر ملحق الإجابات.

11 أجد عدد الخيارات الممكنة أمام يوسف. 20

12 **بوشار:** يرغب مهند في شراء بوشار يُباع في علب بثلاثة حجوم مختلفة: صغير، ووسط، وكبير، وأمامه نكهتان مختلفتان: الملح، والزبدة، كم خيارًا مختلفًا أمام مهند لشراء البوشار؟ أنظر ملحق الإجابات.

مثال: عصير طبيعي: تريد عبير شراء عصير طبيعي من محل يبيع العصير في أكواب بثلاثة حجوم مختلفة: صغير، ووسط، وكبير، ولديه 3 أنواع مختلفة من الفاكهة: فراولة، وموز، وبرتقال. كم خيارًا مختلفًا أمام عبير لشراء العصير؟

يمكنني استعمال الشجرة البيانية لتحديد عدد الخيارات الممكنة أمام عبير.



إذن، لدى عبير 9 بدائل مختلفة للعصير.

كتاب التمارين

الدرس 1
مبدأ العَدِّ الأساسي
Fundamental Counting Principle

الوحدة 2: مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لظهور شخص بزي مُكوَّن من بنطال يتوافر منه 3 ألوان (أسود، وأزرق، وبني)، قميص يتوافر منه 3 ألوان (أبيض، وأخضر، ورمادي)، باستعمال: (3–1)، أنظر ملحق الإجابات.

1. مخطط الشجرة.
2. الجدول.
3. القائمة المنظمة.
4. في محل لبيع القرطاسية 8 أنواع مختلفة من الأقلام، و6 أنواع مختلفة من الدفاتر المدرسية. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار قلم واحد ودفتر واحد. $8 \times 6 = 48$

بكم طريقة يُمكِن اختيار نوعين من الحلويات من بين 7 أنواع مختلفة، ونوعين من المشروبات الساخنة من بين 5 أنواع مختلفة:

5. إذا سُمِح بالتكرار؟ $7 \times 7 \times 5 \times 5 = 1225$
6. إذا لم يُسمَح بالتكرار؟ $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$
7. إذا سُمِح بتكرار أنواع الحلويات فقط؟ $7 \times 7 \times 5 \times 4 = 980$

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رمز دخول للبريد الإلكتروني، يتألَّف من حرفين من حروف الإنجليزية (عددها 26 حرفًا) من دون الاهتمام بحجم الحرف، ورقمين من الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

8. إذا سُمِح بالتكرار. $26 \times 26 \times 9 \times 9 = 54756$
9. إذا لم يُسمَح بالتكرار. $26 \times 25 \times 9 \times 8 = 46800$
10. إذا كان الحرف الأول B، ولا يُسمَح بالتكرار. $1 \times 25 \times 9 \times 8 = 1800$
11. **جامعات:** ترغب فاطمة في اختيار تخصُّص من بين 7 تخصُّصات جامعية، وكذلك اختيار جامعة من بين 4 جامعات قريبة من منزلها. بكم طريقة يُمكِنها اختيار التخصُّص والجامعة؟

$7 \times 4 = 28$

الدرس 2
مضروب العدد
Factorial

الوحدة 2: مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق

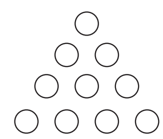
أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1. $7!$ 5040
2. $(6-2)!$ 24
3. $(5!)(3!)$ 720
4. $\frac{6!}{4!}$ 30
5. $\frac{2!}{4!}$ $\frac{1}{12}$
6. $\frac{9!}{(7!)(2!)}$ 36
7. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس 4 طلبة على 4 كراسي موضوعة في صف واحد. 24

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

8. FORMING $7! = 5040$
9. REARRANGE $\frac{9!}{(3!)\,(2!)\,(2!)} = 15120$

كوَّن أعضاء فريق للعروض الرياضية هرمًا بشريًّا بوقوف بعضهم على أكتاف بعض كما في الشكل المجاور:



10. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الأربعة الواقفين في الصف السفلي فقط تبادل الأماكن في ما بينهم. $4! = 24$
11. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الستة الواقفين في الصفوف العلوية الثلاثة فقط تبادل الأماكن في ما بينهم. $6! = 720$
12. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الأربعة الواقفين في الصف السفلي تبادل الأماكن في ما بينهم، وأمكن لأعضاء الفريق الستة الواقفين في الصفوف العلوية الثلاثة تبادل الأماكن في ما بينهم. $(4!)\,(6!) = 17280$
13. **سياحة:** أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها ترتيب زيارة إلى الأماكن الأثرية الآتية:

البترا، وادي رم، قلعة العقبة، قلعة الشوبك، قلعة الكرك.

$5! = 120$

ملاحظاتي

كتاب التمارين

الوحدة 2: مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق

الدرس 3
التباديل
Permutations

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1. $_{15}P_5$ 360360
2. $(_8P_5)(_7P_3)$ 1411200

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

3. $\frac{_{17}P_9}{_{10}P_6}$ 58344
4. $\frac{_9P_8}{(_8P_3)(_3P_2)}$ 180

5. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاصطفاف 3 أشخاص في خط مستقيم. $_3P_3 = 6$
6. بكم طريقة قد يكون لـِ 3 أصدقاء تواريخ ميلاد مختلفة بافتراض أنَّ في السنة 365 يومًا؟ $_{365}P_3 = 48228180$
7. بكم طريقة يُمكِن لسمير ترتيب 7 كتب مختلفة على رفٍّ في غرفته؟ $_7P_7 = 5040$
8. كم عددًا من منزلتين يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 5 ,4 ,3 ,2 ,1 بافتراض عدم السماح بالتكرار؟ $_5P_2 = 20$
9. بكم طريقة يُمكِن اختيار 3 سائقين عشوائيًّا من بين 10 سائقين، بحيث يتولّى الأول قيادة حافلة للطلاب، والثاني قيادة حافلة للطالبات، والثالث قيادة حافلة للموظفين في إحدى الجامعات؟ $_{10}P_3 = 720$
10. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها لأسيل ترتيب 6 أنواع مختلفة من العصير بعضها بجانب بعض في الرفِّ الذي في باب الثلّاجة. $_6P_6 = 720$
11. بكم طريقة يُمكِن لرسّام اختيار 6 لوحات فنية عشوائيًّا من بين 10 لوحات مختلفة رسمها، ثم عرض بعضها بجانب بعض في صف واحد على حائط؟ $_{10}P_6 = 151200$
12. بكم طريقة يُمكِن لمُدرِّب فريق كرة قدم اختيار 5 لاعبين عشوائيًّا من بين 11 لاعبًا؛ لتنفيذ ركلات الترجيح الخمس بعد انتهاء الشوطين الإضافيين من المباراة؟ $_{11}P_5 = 55440$
13. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار طالب لفريق الكشّافة المدرسي، وآخر للجنة الخدمة الاجتماعية المدرسية من صف يحوي 22 طالبًا. $_{22}P_2 = 462$

الوحدة 2: مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق

الدرس 4
التوافيق
Combinations

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1. $_9C_5$ 126
2. $(_{10}C_6)-(_9C_7)$ 174

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

3. $(_{15}C_2)(_8C_3)$ 5880
4. $\frac{_{12}C_3}{_{11}C_3}$ $\frac{4}{3}$

5. كم لجنة تضم 3 أشخاص يُمكِن تكوينها عشوائيًّا من بين 8 أشخاص؟ $_8C_3 = 56$
6. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين لجنة تضم 2 من المُعلِّمين و4 من الطلبة الذين اختيروا عشوائيًّا من بين 7 مُعلِّمين و9 طلبة. $(_7C_2)(_9C_4) = 2646$
7. كم مجموعة جزئية من رقمين يُمكِن تكوينها من الأرقام: 5 ,4 ,3 ,2 ,1؟ $_5C_2 = 10$
8. أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها لطبيب اختيار نوعين من الضمادات الطبية من بين 9 أنواع مختلفة متوافرة لديه. $_9C_2 = 36$

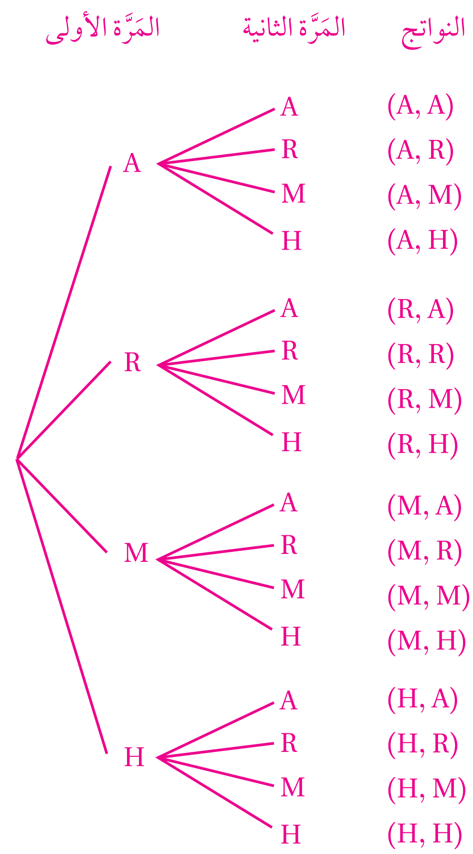
يراد اختيار 4 طلاب عشوائيًّا من صف فيه 22 طالبًا؛ للمشاركة في مسابقات تُنظِّمها المدرسة:

9. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هؤلاء الطلاب. $_{22}C_4 = 7315$
10. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هؤلاء الطلاب إذا كان الأول سيشارك في مسابقة الشِّعر، والثاني سيشارك في مسابقة الرياضيات، والثالث سيشارك في مسابقة الثقافة العامة، والرابع سيشارك في مسابقة مهارات الحاسوب. $_{22}P_4 = 175560$
11. ذهب سعيد إلى محل لبيع الملابس، فوجد فيه 9 ألوان مختلفة من القمصان، و8 ألوان مختلفة من البناطيل. أجد عدد الطرائق المختلفة التي يُمكِن بها لسعيد شراء 3 قمصان و4 بناطيل من هذا المحل. $(_9C_3)(_8C_4) = 5880$
12. أجد عدد الطرائق المختلفة التي يُمكِن بها اختيار كتابين من 5 كتب ثقافية و 3 كتب من 5 كتب تاريخية. $(_5C_2)(_5C_3) = 100$

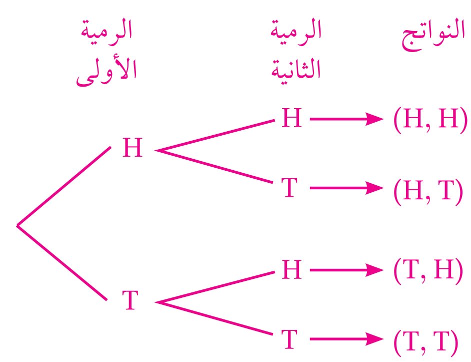
ملاحظاتي

إجابة الأسئلة في بند (أستعد لدراسة الوحدة):

1)

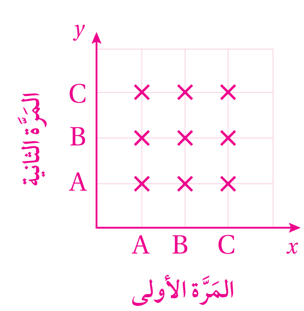


2) 4 نواتج، هي: (H, H), (H, T), (T, H), (T, T).

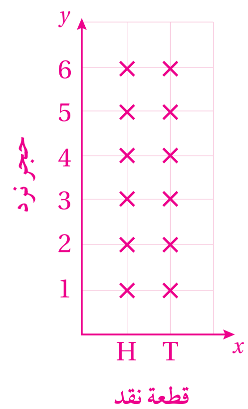


4) $\Omega = \{(R,R), (R,B), (R,G), (B,R), (B,B), (B,G), (G,R), (G,B), (G,G)\}$

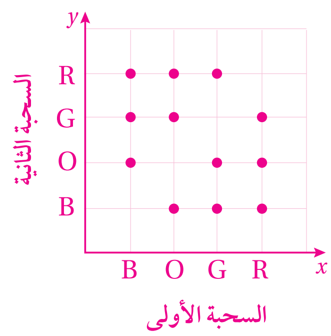
7)



8)



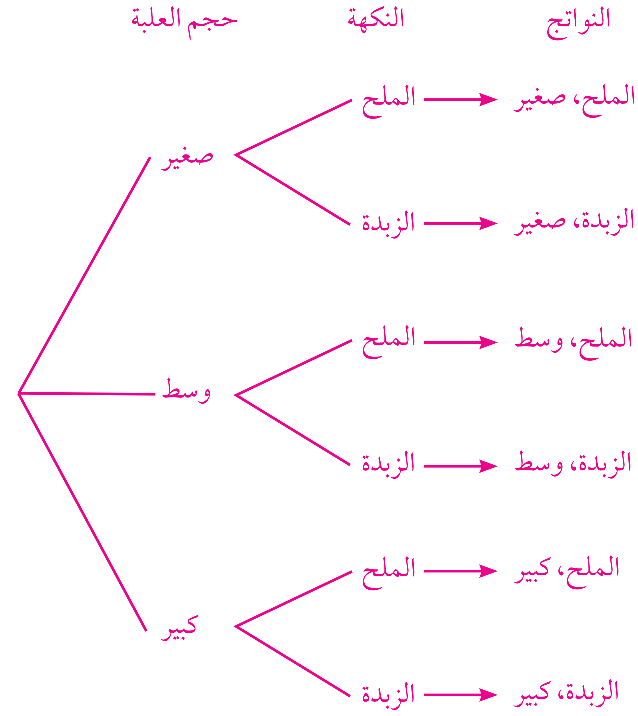
9)



10)

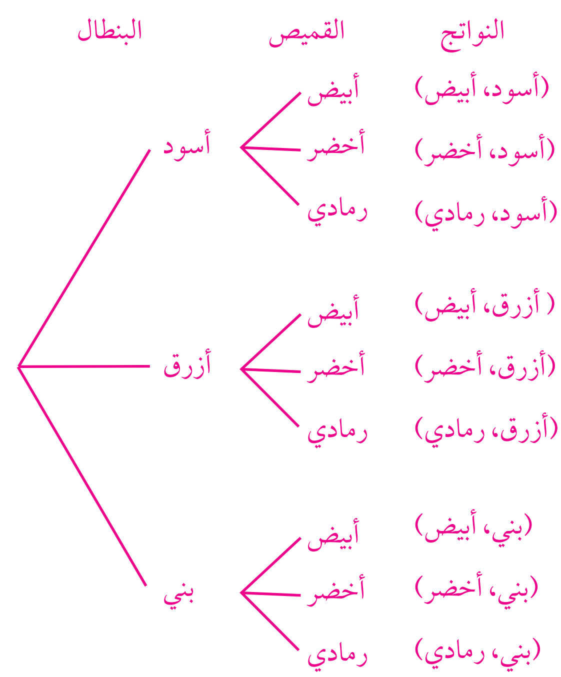
		لون المشغل				
		أسود	زهري	أزرق	أخضر	فضي
سعة المشغل GB	2	أسود, 2	زهري, 2	أزرق, 2	أخضر, 2	فضي, 2
	4	أسود, 4	زهري, 4	أزرق, 4	أخضر, 4	فضي, 4
	8	أسود, 8	زهري, 8	أزرق, 8	أخضر, 8	فضي, 8
	16	أسود, 16	زهري, 16	أزرق, 16	أخضر, 16	فضي, 16

12)



إجابة أسئلة الدرس (1):

1)



2)

		القميص		
البنطال		أبيض	أخضر	رمادي
	أسود	أسود، أبيض	أسود، أخضر	أسود، رمادي
	أزرق	أزرق، أبيض	أزرق، أخضر	أزرق، رمادي
	بني	بني، أبيض	بني، أخضر	بني، رمادي

3)

أسود، أبيض   أسود، أخضر   أسود، رمادي

أزرق، أبيض   أزرق، أخضر   أزرق، رمادي

بني، أبيض   بني، أخضر   بني، رمادي

توجد 9 طرائق لظهور الشخص بزيٍّ مختلف.

الوحدة 3

الاحتمالات
Probability

مُخطَّط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: **الاحتمال بالتباديل والتوافيق.**	• استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد عناصر الفضاء العيني، وعدد عناصر حوادث في تجربة عشوائية. • استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد احتمالات حوادث في تجربة عشوائية.		• آلة حاسبة.	4
الدرس 2: **المُتغيِّرات العشوائية.**	• تعرُّف المُتغيِّر العشوائي. • إيجاد قِيَم المُتغيِّر العشوائي في تجربة عشوائية. • إيجاد العناصر المُرتبِطة بقيمة مُحدَّدة من قِيَم مُتغيِّر عشوائي.	المُتغيِّر العشوائي.	• أحجار نرد. • بطاقات مُرقَّمة. • كرات مُلوَّنة. • أقراص ذات مُؤشِّر دوّار.	3
الدرس 3: **احتمال المُتغيِّر العشوائي.**	• إيجاد احتمال قِيَم المُتغيِّر العشوائي في تجربة عشوائية. • تعرُّف التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّر عشوائي، وخصائصه. • كتابة التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّر عشوائي، وتمثيله بطرائق مختلفة.	التوزيع الاحتمالي.	• بطاقات حروف. • بطاقات مُرقَّمة. • كرات مُلوَّنة. • لوح رسم بياني.	3
الدرس 4: **توقُّع المُتغيِّر العشوائي.**	• تعرُّف توقُّع المُتغيِّر العشوائي. • تعرُّف تباين المُتغيِّر العشوائي. • إيجاد كلٍّ من التوقُّع، والتباين للمُتغيِّر العشوائي المنفصل.	توقُّع المُتغيِّر العشوائي. تباين المُتغيِّر العشوائي.	• آلة حاسبة.	3
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				15 حصة

الوحدة 3

الوحدة
3
الاحتمالات
Probability

ما أهمية هذه الوحدة؟

صحيح أنَّ الحوادث التي تقع مستقبلًا هي من علم الغيب، ولكنَّ علماء الإحصاء والاحتمال وضعوا نظريات يُمكِن تطبيقها لتقدير احتمالية وقوع بعض الحوادث ضمن مواقف حياتية. فمثلًا، شركات التأمين تعتمد الاحتمالات المحسوبة من طلبات التعويض عن الأضرار السابقة أساسًا للتنبُّؤ باستحقاقات التعويض المستقبلية.

58

نظرة عامة على الوحدة:

تعلَّم الطلبة سابقًا التجربة العشوائية، والفضاء العيني، والحادث، ومفهوم الاحتمال، وكتابة عناصر الفضاء العيني باستعمال الجدول، والقائمة المنظمة، ومخطط الشجرة، وإيجاد احتمالات حوادث بسيطة واحتمالات حوادث مُركَّبة، بما في ذلك الحوادث المتنافية، والحوادث غير المتنافية، والحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة. وكذلك إيجاد الاحتمال المشروط، ومبدأ العد الأساسي، والتباديل، والتوافيق، واستعمال التباديل والتوافيق لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عديدة. سيتعلَّم الطلبة في هذه الوحدة إيجاد الاحتمال باستعمال مبدأ العد الأساسي، والتباديل، والتوافيق، والمُتغيِّرات العشوائية، وتحديد مداها وتوزيعها الاحتمالي، وإيجاد توقُّع المُتغيِّر العشوائي وتباينه.

الوحدة 3

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية من مراحل عِدَّة.
- ✓ استعمال التباديل لإيجاد عدد الطرائق عندما يكون الترتيب مهمًّا.
- ✓ استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.
- ✓ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لنمذجة مواقف حياتية، وحَلِّ مسائل عملية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب الاحتمالات.
- ◄ تعرُّف المتغير العشوائي لنواتج تجربة عشوائية، وتحديد قِيَم هذا المتغير.
- ◄ حساب الاحتمال لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.
- ◄ إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (20–25) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

59

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف العاشر:

- تمييز الحوادث المتنافية من الحوادث غير المتنافية، وإيجاد احتمالات كلٍّ منهما.
- تمييز الحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، وإيجاد احتمالات كلٍّ منهما.
- إيجاد احتمال اتحاد حادثين، وتقاطعهما، واحتمال المُتمِّمة.
- تمثيل التجارب العشوائية بأشكال فن، والشجرة الاحتمالية، واستعمال كلٍّ منهما لإيجاد الاحتمال.
- إيجاد الاحتمال المشروط في مواقف حياتية باستعمال القانون، ومن الجداول ذات الاتجاهين.

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- إيجاد الاحتمال باستعمال مبدأ العد، والتباديل، والتوافيق.
- إيجاد قِيَم المُتغيِّر العشوائي، وإيجاد احتمال كلٍّ قيمة منها.
- تمثيل التوزيع الاحتمالي بجدول، ورسم بياني، ومجموعة أزواج مُرتَّبة.
- إيجاد كلٍّ من توقُّع المُتغيِّر العشوائي، وتباينه.

الصف الثاني عشر (الأدبي):

- إيجاد الاحتمال في التوزيع الهندسي، والتوزيع ذي الحدين.
- إيجاد كلٍّ من توقُّع التوزيع الهندسي، والتوقُّع والتباين للتوزيع ذي الحدين.
- تعرُّف التوزيع الطبيعي، وخصائص منحناه.
- إيجاد كلٍّ من احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، وتوقُّعه، وتباينه.
- حل مسائل حياتية عن كلٍّ من التوزيع الهندسي، والتوزيع ذي الحدين، والتوزيع الطبيعي، والتوزيع الطبيعي المعياري.

الدرس

1

نتاجات الدرس

- استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد عناصر الفضاء العيني، وعدد عناصر حوادث في تجربة عشوائية.
- استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد احتمالات حوادث في تجربة عشوائية.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد كلٍّ من مضروب العدد، وعدد التباديل، وعدد التوافيق لعناصر عددها n، وقد أُخِذ منها r عنصرًا كل مَرَّة.
- استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عديدة.
- إيجاد احتمالات حوادث بسيطة وأخرى مُركَّبة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - كم عددًا مُؤلَّفًا من 3 أرقام يُمكِن تكوينه من الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5، في حال سُمِح بتكرار الرقم في العدد نفسه، وفي حال لم يُسمَح بالتكرار؟
    في حال سُمِح بالتكرار، يُمكِن تكوين 5^3 من الأعداد؛ أيْ 125 عددًا، وفي حال لم يُسمَح بالتكرار، فإنَّ عدد الأعداد هو: $5\times4\times3 = 60$


الدرس 1

الاحتمال بالتباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

فكرة الدرس استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب احتمالات الحوادث في تجربة عشوائية.

مسألة اليوم أراد خالد التقاط صورة لعائلته، فوقف الأب والأم والابن والابنة في صف واحد أمام الكاميرا. ما احتمال وقوف الابن والابنة بين الأبوين؟

تعلَّمْتُ في الوحدة السابقة كيفية إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العَدِّ، ويُمكِنني الآن الاستفادة من ذلك في حساب احتمال وقوع حادث مُعيَّن ضمن تلك التجربة العشوائية.

مثال 1

رُتِّبت البطاقات الآتية عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يظهر الرقمان 3 و 4 متجاورين؟

3 1 5 4 2

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث A يعني ظهور الرقمين 3 و 4 متجاورين.

الخطوة 2: أحسب عدد عناصر Ω؛ أيْ عدد طرائق ترتيب 5 عناصر (بطاقات) في صف واحد.

$n(\Omega) = 5!$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف مضروب العدد

$= 120$ بالتبسيط

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A.

أُظهِر الرقمين 3 و 4 متجاورين في إحدى صورتين: 43، أو 34، وأُعامِل كُلًّا منهما كأنَّهما عنصر واحد، ثم أجد عدد طرائق ترتيب 4 عناصر:

$n(A) = 2 \times 4!$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$= 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف مضروب العدد

$= 48$ بالتبسيط

أتذكَّر
الرمز Ω يُقرَأ: أوميغا، ويدل على الفضاء العيني للتجربة العشوائية.

- بكم طريقة يُمكِن أنْ يجلس 4 طلبة على 6 مقاعد موضوعة في صف واحد؟
  $_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$
- كم هدية مُؤلَّفة من 3 كتب يُمكِن اختيارها عشوائيًّا من بين 5 كتب علمية مختلفة، و 4 كتب أدبية مختلفة؟ $_9C_3 = 84$
- كم واحدة منها تضمُّ كتابين علميين على الأقل؟
  $_5C_2\times{}_4C_1+{}_5C_3\times{}_4C_0 = 10\times4+10\times1 = 50$

- أُناقِش الطلبة في حل الأسئلة السابقة، ثم أطلب إليهم تبرير إجاباتهم، وتوضيح الفرق بين التباديل والتوافيق.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ما المقصود بالاحتمال؟ فرصة وقوع الحادث، موضوع السؤال، التي تُحدَّد برقم في الفترة $[0, 1]$.
  - كيف يُمكِن إيجاد الاحتمال؟ بقسمة عدد النواتج في الحادث المطلوب على عدد نواتج التجربة جميعها عندما تكون النواتج متساوية الاحتمال.
  - بكم طريقة يُمكِن أنْ يقف الأب والأُمُّ مع ولديهما في صف واحد أمام الكاميرا؟ $4! = 24$ طريقة.
  - بكم طريقة يُمكِن أنْ يقف الأب والأُمُّ على جانبي الصف؟ بطريقتين.
  - بكم طريقة يُمكِن أنْ يقف الابن والابنة بين أبويهما؟ بطريقتين.
  - أيُّكم يُمكِنه رسم شكل يُبيِّن مكان وقوف الابن والابنة بين أبويهما؟ ستختلف الأشكال وتتنوَّع.

مثال:

الأب	الابن	الابنة	الأُمُّ

  - هل يُمكِن رسم أشكال أخرى تُحقِّق هذا الشرط؟ نعم.
  - كيف يُمكِن معرفة عدد الحالات التي تُحقِّق هذا الشرط؟ بضرب عدد طرائق وقوف الأبوين في عدد طرائق وقوف الولدين.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أنْ أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمَنْ يستطيع إعطاء إجابة أخرى"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بالتجربة العشوائية، والحوادث وأنواعها، وكيفية إيجاد احتمال أيِّ حادث في تجربة عشوائية، وما يَلزم معرفته لإيجاد احتمال الحادث.
- أكتب على اللوح المثال الآتي:

سحب خليل بطاقة واحدة عشوائيًّا من كيس فيه 10 بطاقات، تحمل كلٌّ منها عددًا من 1 إلى 10:

  - ما احتمال أنْ تحمل البطاقة المسحوبة أحد مضاعفات العدد 3؟ 0.3
  - ما احتمال أنْ تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أوَّليًّا؟ 0.4
  - ما احتمال أنْ تحمل البطاقة المسحوبة أحد عوامل العدد 8 أو عددًا أكبرَ من العدد 6؟ 0.7
  - أَصِفُ حادثًا احتماله 0.6. ستختلف إجابات الطلبة.

من الإجابات المُحتمَلة:

  - سحب بطاقة تحمل عددًا أكبرَ من العدد 2، وأصغرَ من العدد 9.
  - سحب بطاقة تحمل عددًا فرديًّا أو عددًا أوَّليًّا.
  - سحب بطاقة تحمل أحد عوامل العدد 24.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ هذا الدرس يتضمَّن إيجاد الاحتمالات في تجارب عشوائية، واستعمال إحدى طرائق العد (مبدأ العد الأساسي، التباديل، التوافيق)، أو أكثر من طريقة منها؛ لتعرُّف عدد عناصر الفضاء العيني، وعدد عناصر الحادث.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُبيِّنًا لهم كيفية استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد الاحتمال، وذلك بإيجاد عدد عناصر Ω، وعدد عناصر الحادث، ثم التعويض في صيغة إيجاد الاحتمال.

> **إرشاد:** أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

مثال إضافي:

رُتِّبت عشوائيًّا 7 بطاقات مُتماثِلة، تحمل كلٌّ منها أحد أحرف كلمة (مزارعون) في صف واحد. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

a) أنْ تكون البطاقتان اللتان تحملان الحرفين (م)، و(ن) متجاورتين. $\frac{2}{7}$

b) أنْ تكون البطاقة التي تحمل الحرف (ن) في وسط الصف. $\frac{1}{7}$

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

مثال 2: من الحياة

- أُذكِّر الطلبة بإمكانية استعمال التباديل في التجارب العشوائية التي يكون فيها ترتيب العناصر المختارة من مجموعة عناصر مُهِمًّا.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، الذي يُبيِّن كيف يُمكِن استعمال التباديل لإيجاد الاحتمال، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ما التجربة العشوائية (العملية) في هذه المسألة؟ اختيار رئيس ونائب رئيس من بين 7 أعضاء.
  - كيف يُمكِن إيجاد عدد نواتجها؟ باستعمال التباديل، أو مبدأ العد؛ لأنَّ ترتيب الاختيار مُهِمٌّ.
  - ما الحادث الذي يراد إيجاد احتماله؟ اختيار سارة رئيسًا، واختيار حمزة نائبًا للرئيس.
  - ما عدد عناصر هذا الحادث؟ واحد.

مثال إضافي:

يتألَّف عدد من 3 أرقام مختلفة اختيرت عشوائيًّا من بين الأرقام: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9. ما احتمال أنْ يكون هذا العدد 732؟ $\frac{1}{210}$

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 2، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي الوطني بتنظيم حوار عن طريقة الاختيار العشوائي لرئيس المجلس ونائبه، وإيجابياتها وسلبياتها، وكيف يُمكِن تحسين طريقة الاختيار، وما يجب أنْ يتوافر فيمَنْ يتولّى مهمة رئاسة المجلس.

أتعلَّم

يُمكِن تسهيل الاختصار على النحو الآتي:

$p(A) = \frac{2 \times \cancel{4!}}{5 \times \cancel{4!}} = \frac{2}{5}$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{120}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$= \frac{2}{5}$$ بالتبسيط

إذن، احتمال ظهور الرقمين 3 و4 متجاورين هو $\frac{2}{5}$

أتحقَّق من فهمي

كُتِبت أحرف كلمة (تباديل) على 6 بطاقات مُتماثِلة، ثم رُتِّبت البطاقات عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يظهر الحرفان (ت) و(ي) متجاورين؟ $\frac{1}{3}$

عندما يكون الترتيب مهمًّا في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال التباديل لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 2: من الحياة

يتكوَّن مجلس الإدارة في إحدى الشركات من 7 أعضاء، بينهم سارة وحمزة. ما احتمال اختيار سارة رئيسًا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1: أفترض أنَّ A يعني اختيار سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لذا فإنَّ:

$$n(\Omega) = {}_7P_2$$ عدد طرائق اختيار عنصرين (ترتيبهما مهم) من بين 7 عناصر

$$= \frac{7!}{(7-2)!}$$ بالتعويض في قانون التباديل

$$= \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}}$$ مضروب العدد

$$= 42$$ بالتبسيط

أتذكَّر

$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

حيث: n, r عددان صحيحان. $0 \le r \le n$.

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة تكون فيها سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس؛ لذا فإنَّ:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال $\quad p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{42}$

إذن، احتمال اختيار سارة رئيسًا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس هو $\frac{1}{42}$

أتحقَّق من فهمي

فؤاد ومصطفى اثنان من 10 طلبة مشاركين في مسابقة الحساب الذهني. إذا كانت لجنة التحكيم تستدعي عشوائيًّا الطلبة المشاركين الواحد تلو الآخر لخوض المسابقة، فما احتمال استدعاء فؤاد أولًا ومصطفى ثانيًا؟ $\frac{1}{90}$

عندما **لا يكون الترتيب مهمًّا** في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال **التوافيق** لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

أتعلَّم

أُلاحِظ الفرق بين الموقف الذي يكون فيه الترتيب مهمًّا والموقف الذي لا يكون فيه الترتيب مهمًّا، بمقارنة المثال 2 بالمثال 3.

مثال 3 : من الحياة

يوجد في قسم التطوير بإحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم سعاد وحامد. ما احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور ندوة عن المُنتَجات المعالجة وراثيًّا إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب بين سعاد وحامد غير مهم في هذه الحالة؛ لذا أستعمل التوافيق:

عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 7 عناصر $\quad n(\Omega) = {}_7C_2$

بالتعويض في قانون التوافيق $\quad = \frac{7!}{2! \times (7-2)!}$

مضروب العدد $\quad = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{2 \times \cancel{5!}}$

بالتبسيط $\quad = 21$

أتذكَّر

$nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$

حيث: n, r عددان صحيحان. $0 \le r \le n$.

مثال 3: من الحياة

- أُذكِّر الطلبة بإمكانية استعمال التوافيق في التجارب العشوائية التي يكون فيها ترتيب العناصر المختارة من مجموعة عناصر غير مُهِمٍّ.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، الذي يُبيِّن كيف يُمكِن إيجاد احتمال في موقف حياتي باستعمال التوافيق، وإيجاد عدد عناصر الفضاء العيني، ثم أطرح على الطلبة أسئلة مُشابِهة لتلك المطروحة في المثال 2، مُوضِّحًا الفرق بين الحالتين، وهو ما أدّى إلى استعمال التوافيق.

تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد تفسير للمسائل الحياتية، ومعرفة إذا كان حلها باستعمال التباديل أم التوافيق؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأُقدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوِّهًا إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن مضارِّ النباتات المُعالَجة وراثيًّا، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

مثال إضافي:

اختير عددان عشوائيًّا من بين الأعداد:

$$2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13$$

ما احتمال أنْ يكون مجموعهما 19؟

$$n(\Omega) = {}_8C_2 = 28$$

العددان اللذان مجموعهما 19 هما:

$$\{6, 13\}, \{7, 12\}, \{8, 11\}$$

$$n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{3}{28}$$

مثال 4: من الحياة

- أُوضِّح للطلبة أنَّه قد توجد مجموعتان مختلفتان من العناصر في بعض المواقف، ويراد اختيار عدد من العناصر عشوائيًّا من هاتين المجموعتين معًا، ثم إيجاد احتمال أنْ تحوي العناصر المختارة عددًا مُعيَّنًا مثل r_1 من المجموعة الأولى، وعددًا مُعيَّنًا آخرَ مثل r_2 من المجموعة الثانية. عندئذٍ يكون عدد عناصر Ω هو عدد طرائق اختيار $(r_1 + r_2)$ من عناصر المجموعتين المُدمَجتين، ويكون عدد عناصر الحادث مساويًا لعدد طرائق اختيار r_1 من المجموعة الأولى مضروبًا في عدد طرائق اختيار r_2 من المجموعة الثانية.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أُذكِّر الطلبة بالرموز المُستعمَلة للتعبير عن التوافيق والتباديل، التي ورد ذكرها في صندوق (رموز رياضية).

مثال إضافي:

في وعاء 6 كرات حمراء، و9 كرات سوداء، و5 كرات بيضاء، وهي جميعًا مُتماثِلة. إذا سُحِبت من الوعاء 4 كرات دفعة واحدة عشوائيًّا، فأجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

a) أنْ تكون 3 كرات من الكرات المسحوبة حمراء، وكرة واحدة بيضاء. $\frac{{}_6C_3 \times {}_5C_1}{{}_{20}C_4} = \frac{20}{969}$

b) أنْ تكون كرة واحدة من الكرات المسحوبة حمراء، وكرة واحدة سوداء، وكرتان بيضاوين. $\frac{{}_6C_1 \times {}_9C_1 \times {}_5C_2}{{}_{20}C_4} = \frac{36}{323}$

c) أنْ تكون الكرات الأربع من اللون نفسه. $\frac{{}_6C_4 \times {}_9C_4 \times {}_5C_4}{{}_{20}C_4} = \frac{146}{4845}$

d) أنْ تكون كل كرتين من لون واحد يختلف عن لون الكرتين الأخريين.

$$P(R,R,B,B)+P(R,R,W,W)+P(B,B,W,W) = \frac{({}_6C_2\times{}_9C_2)+({}_6C_2\times{}_5C_2)+({}_9C_2\times{}_5C_2)}{{}_{20}C_4} = \frac{1050}{4845}$$

النباتات المعالجة وراثيًّا هي نباتات غُيِّرت خصائصها الوراثية عن طريق نقل الجينات من صنف إلى آخر؛ بُغْيَةَ زيادة الإنتاج، أو إنتاج محاصيل غريبة، وقد أثبتت كثير من الأبحاث خطورة هذه المحاصيل على صحة الإنسان.

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة لاختيار سعاد وحامد لحضور الندوة؛ لذا فإنَّ:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال $\quad p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{21}$

إذن، احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة هو $\frac{1}{21}$

أتحقَّق من فهمي

صندوق فيه 16 كرة مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من بين الأعداد 0 إلى 15. إذا اختيرت ثلاث كرات عشوائيًّا دفعةً واحدةً، فما احتمال أنْ تحمل الكرات المختارة أعدادًا زوجيةً؟ $P(A) = \frac{8C3}{16C3} = \frac{1}{10}$

تتطلَّب بعض المواقف اختيار r_1 من بين n_1 من العناصر عشوائيًّا في مرحلة أولى، و r_2 من بين n_2 من العناصر عشوائيًّا في مرحلة ثانية، وتُمثِّل $n_2 + n_1$ عدد العناصر الكلية، ويُمكِن اختيار r_1 أو r_2 مع مراعاة الترتيب (تباديل)، أو من دون مراعاة الترتيب (توافيق).

مثال 4 : من الحياة

شارك 14 طالبًا و16 طالبةً من إحدى المديريات في مسابقة شعرية، وقد اختير منهم 5 طلبة عشوائيًّا لتمثيل لجنة تنظيمية. أجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 احتمال اختيار 3 طلاب وطالبتين.

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار لجنة من 3 طلاب وطالبتين.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب في هذه الحالة غير مهم؛ لذا أستعمل التوافيق لحساب عدد طرائق اختيار 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبةً:

عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 30 عنصرًا $\quad n(\Omega) = {}_{30}C_5$

باستعمال الآلة الحاسبة $\quad = 142506$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A.

أجد عـدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًا مضروبًا في عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً.

الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين. وبحسب مبدأ العَدِّ، فإنَّ:

مبدأ العَدِّ الأساسي	$n(A) = {}_{14}C_3 \times {}_{16}C_2$
باستعمال الآلة الحاسبة	$= 43680$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال	$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{43680}{142506}$
بالتبسيط	≈ 0.31

2 **احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة ونائبه من الطالبات، والأعضاء الثلاثة الآخرون من الطلاب.**

الخطوة 1: أفترض أنَّ B يعني اختيـار رئيس اللجنة ونائبه من الطالبـات، واختيار الأعضاء الثلاثة الآخرين من الطلاب.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب غير مهم لاختيار لجنة فيها 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبةً؛ لذا فإنَّ:

عدد طرائق اختيار 5 من بين 30	$n(\Omega) = {}_{30}C_5$
باستعمال الآلة الحاسبة	$= 142506$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث B.

أجـد عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً (الترتيـب مهم في هذه الحالة؛ لأنَّ إحدى الطالبتين رئيس، والأُخرى نائب للرئيس) مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًـا (الترتيـب غير مهم فـي هـذه الحالـة؛ لأنَّ جميع الطـلاب أعضاء فـي اللجنة):

مبدأ العَدِّ الأساسي	$n(B) = {}_{16}P_2 \times {}_{14}C_3$
باستعمال الآلة الحاسبة	$= 87360$

رموز رياضية

الرمزان الآتيان مُتكافِئان:

$P(n,r) \cong {}_nP_r$

$\binom{n}{r} \cong {}_nC_r$

توسعة:

أطلب إلى الطلبـة إيجاد قيمة ${}_7P_4$، ثم أسـألهم بعد كتابة خطـوات الحل: هل يُمكِن إيجاد الناتـج بطريقة أخرى؟ وذلك لإيصال فكرة أنَّ ${}_7P_4$ يسـاوي ناتج ضرب 4 عوامل متتالية، أكبرهـا هو العدد 7، وأنَّه يُمكِن تعميم هذه الفكرة بأنَّ ${}_nP_r$ يسـاوي ناتج ضـرب عوامل متتاليـة، عددها r، وأكبرها هو n:

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-r)}_{\text{من العوامل } r}$$

يُمكِن أيضًا إيجاد التوافيق بطريقة مُشـابِهة، وذلك بقسمة عدد التباديل على مضروب r:

$${}_nC_r = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-r)}^{\text{من العوامل } r}}{\underbrace{r(r-1)\ldots\times 3\times 2\times 1}_{\text{من العوامل } r}}$$

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–4) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

إرشاد: عند حل السؤال 10، أُبيِّن للطلبة أنَّه يُمكِنهم حله بالطرائق التي تعلَّموها في الصف العاشر لإيجاد احتمال الحوادث المستقلة؛ ذلك أنَّ الحوادث تكون مستقلة عند السحب مع الإرجاع.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 11 والمسألة 12.
- أتجوَّل بين أفراد المجموعات مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$p(\mathrm{B}) = \frac{n(\mathrm{B})}{n(\Omega)} = \frac{87360}{142506}$$

بالتبسيط

$$\approx 0.61$$

أتحقَّق من فهمي

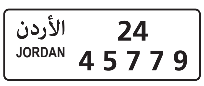
عائلة تضم 6 أولاد و3 بنات، أرادت الأم اختيار 4 منهم لتحضير وجبة العشاء. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

a) اختيار 2 من الأولاد، و2 من البنات. $P(A) = \frac{{}_6C_2 \times {}_3C_2}{{}_9C_4} = \frac{5}{14}$

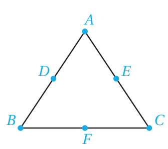
b) اختيار ولد لإعداد الشاي، وولد لطهي الطعام، وبنتين لتجهيز المائدة. $P(B) = \frac{{}_6P_2 \times {}_3C_2}{{}_9C_4} = \frac{5}{7}$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

1) **مسرح:** أرادت منار وحليمة حضور مسرحية، فاختارت كُلٌّ منهما مقعدًا في الصف الأمامي الذي يحوي 12 مقعدًا. ما احتمال أنْ تجلسا على مقعدين متجاورين؟ $\frac{2(11!)}{12!} = \frac{1}{6}$



2) **لوحة مركبة:** تتألَّف لوحة المركبة في الأردن من رمز خاص بإدارة ترخيص المركبات، مُكوَّن من رقمين يُكتَبان أعلى اللوحة، ويُمثِّلان رمزًا مشتركًا لمركبات عِدَّة، ومن 5 أرقام من بين الأرقام 0 إلى 9 خاصة بكل مركبة. إذا اختيرت مركبة عشوائيًّا رمزها المشترك 24، فما احتمال أنْ يكون رقمها 45779؟ (إرشاد: لا يجوز أنْ تكون خانات اللوحة كلها أصفارًا). $\frac{1}{10^5 - 1} = \frac{1}{99999}$



3) **هندسة:** في الشكل المجاور، إذا اختيرت ثلاث نقاط عشوائيًّا، فما احتمال أنْ تكون هذه النقاط على استقامة واحدة؟ $\frac{3}{{}_6C_3} = \frac{3}{20}$

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة عند إيجاد عدد عناصر الفضاء العيني للتجربة العشوائية، وذلك باستعمال التوافيق بدلًا من التباديل أو العكس؛ لذا أَلفِت انتباه الطلبة إلى استعمال التباديل إذا كان الترتيب مُهِمًّا، واستعمال التوافيق إذا كان الترتيب غير مُهِمٍّ، ثم أطرح بعض الأمثلة على ذلك:

من الأمثلة على التباديل: تكوين الأعداد، وتكوين الكلمات، واختيار أشخاص ثم تحديد مراكز لهم، مثل: اصطفاف بعضهم بجانب بعض، أو توزيع هدايا مختلفة عليهم.

من الأمثلة على التوافيق: اختيار أشخاص من دون تحديد مراكز لهم أو وظائف، وإعطاؤهم الهدية نفسها، أو تكليفهم جميعًا بعمل واحد.

4 علبة أقلام فيها 6 أقلام حبر أزرق، و4 أقلام حبر أحمر. إذا اختير من العلبة 4 أقلام الواحد تلو الآخر من دون إرجاع عشوائيًّا، فما احتمال اختيار قلمي حبر أزرق وقلمي حبر أحمر؟ $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{3}{7}$

5 **رياضة:** يدير أحد الاتحادات الرياضية مجلسًا مُكوَّنًا من 14 سيدة و 10 رجال. قرَّر الاتحاد اختيار لجنة مُصغَّرة من المجلس تضمُّ 4 أعضاء بصورة عشوائية، ويُنتخَب منها رئيس للجنة، وأمين للسر، وأمينان للصندوق. ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من 3 سيدات، تتولّى إحداهن رئاسة اللجنة، ورجل واحد هو أمين سر اللجنة؟ أنظر ملحق الإجابات.

6 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). $\frac{2 \times 2}{4!} = \frac{1}{6}$

ورد: **أرادت وفاء تزيين حديقة بيتها، فاختارت عشوائيًّا 4 شتلات ورد مرة واحدة من بين 10 شتلات ورد جوري، و7 شتلات ورد قرنفل، و13 شتلة ورد فُلٍّ. ما احتمال أنْ تكون وفاء قد اختارت:**

7 شتلات ورد جوري فقط؟ $\frac{{}_{10}C_4}{{}_{30}C_4} = \frac{2}{261}$

8 شتلات ليس من بينها ورد جوري؟ $\frac{{}_{20}C_4}{{}_{30}C_4} = \frac{323}{1827} \approx 0.1768$

9 شتلة واحدة على الأقل من كل نوع؟ أنظر الهامش.

10 وعـاء فيه 4 كرات حمراء، وكرتان خضراوان، جميعها مُتماثِلة. إذا سُحِبت منه 3 كرات عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع، فما احتمال سحب كرتين خضراوين، وكرة واحدة حمراء؟ أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

11 **مسألة مفتوحة:** أكتب سؤالًا لتجربة عشوائية يكون فيه الاحتمال $\frac{1}{{}_5C_2}$ أنظر الهامش.

12 **تبرير:** بلال وصالح لاعبان في فريق كرة القدم للصف الحادي عشر الذي يضم 14 لاعبًا. أراد معلِّم التربية الرياضية أنْ يُوزِّع عشوائيًّا على كل لاعب قميصًا رياضيًّا من القمصان المُرقَّمة من 1 إلى 14. ما احتمال حصول صالح على القميص رقم 9، وحصول بلال على القميص رقم 10؟ أبرر إجابتي. أنظر ملحق الإجابات.

66

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

$$9) \quad P(B) = \frac{10\times7\times{}_{13}C_2+10\times{}_7C_2\times13+{}_{10}C_2\times13\times7}{{}_{30}C_4} = \frac{12285}{27405} \approx 0.4483$$

11) ستختلف إجابات الطلبة. هذا مثال على إجابة مُحتمَلة:

يوجد في وعاء 3 كرات حمراء، وكرتان سوداوان. سحبت سلمى من الوعاء كرتين معًا عشوائيًّا، ما احتمال أنْ تكون الكرتان المسحوبتان سوداوين؟

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب:(8 – 6) كتاب التمارين: 8 ,(4 – 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 9) كتاب التمارين: (9 – 5)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (12 – 10) كتاب التمارين: (10 – 6)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراءً لهم:

◂ **في نادٍ للشطرنج 10 طلبة، منهم 4 من طلبة الصف الحادي عشر، و6 من طلبة الصف الثاني عشر، اثنان منهم شقيقان. أراد مدير المدرسة أنْ يختار بصورة عشوائية فريقًا من 4 طلبة للمشاركة في مسابقة وطنية. أجد كُلًّا ممّا يأتي:**

1 احتمال أنْ يكون الشقيقان في الفريق. $\frac{2}{15}$

2 احتمال ألّا يكون أيٌّ من الشقيقين في الفريق. $\frac{1}{3}$

3 احتمال أنْ يكون في الفريق اثنان على الأقل من طلبة الصف الحادي عشر. $\frac{23}{42}$

◂ **رتَّب حامد البطاقات الآتية بعضها بجانب بعض عشوائيًّا:**

م	ر	ح	و	ن	ت	ع	ل	ط	ب

أجد احتمال أنْ توجد 6 أحرف بين الحرف (ح) والحرف (ل) في الترتيب الذي وضعه حامد. $\frac{1}{15}$

6 الختام

أطلب إلى كل طالب / طالبة كتابة 3 معلومات أساسية تعلَّمها في هذا الدرس على ورقة، ثم أجمع الأوراق، وأُعِدُّ قائمة تحوي المعلومات الأساسية المُشتَرَكة التي كتبها الطلبة؛ بُغْيَةَ تقييم تعلُّمهم، ومعالجة مواطن الضعف لديهم.

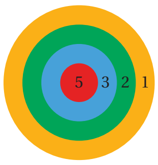
الدرس 2

المتغيرات العشوائية
Random Variables

فكرة الدرس إيجاد قِيَم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات المتغير العشوائي.

مسألة اليوم في لعبة رمي السهام، رمى كلٌّ من إبراهيم ويوسف سهمين على لوحة السهام المجاورة. كم مجموعًا مختلفًا يُمكِن أنْ يُسجِّله إبراهيم أو يوسف؟



يُطلَق على المتغير الذي يُتوصَّل إلى قِيَمه من نواتج تجربة عشوائية اسم **المتغير العشوائي** (random variable). ففي تجربة سحب كرة عشوائيًّا من كيس يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، إذا كان المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الكرات الحمراء في السحبة، فإنَّ قيمة المتغير العشوائي X قد تكون 0 في حالة سحب كرة صفراء، أو 1 في حالة سحب كرة حمراء.

أتعلَّم

إذا كانت مجموعة قِيَم المتغير العشوائي معدودة ومنتهية، فإنَّه يُسمّى متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا. أمّا إذا كانت مجموعة قِيَم المتغير العشوائي غير معدودة وغيرمنتهية، فإنَّه يُسمّى متغيرًا عشوائيًّا متصلًا.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قِيَم X.

أفترض أنَّ H يعني صورة، وأنَّ T يعني كتابة. وبذلك، فإنَّ:

عناصر الفضاء العيني للتجربة $\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$

عدد الصور المرتبط بكل عنصر $X = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2$

إذن، مجموعة قِيَم المتغير العشوائي هي: $X = \{0,1,2\}$.

رموز الرياضيات

يُرمَز إلى قِيَم المتغير العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المتغير العشوائي نفسه بالرمز X.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة إلقاء حجر نرد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد مجموعة قِيَم X. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الدرس 2

نتاجات الدرس

- تعرُّف المُتغيِّر العشوائي.
- إيجاد قِيَم المُتغيِّر العشوائي في تجربة عشوائية.
- إيجاد العناصر المُرتبِطة بقيمة مُحدَّدة من قِيَم مُتغيِّر عشوائي.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- كتابة عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية.
- إيجاد عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية.
- إيجاد احتمالات حوادث بسيطة وأخرى مُركَّبة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُراجِع الطلبة في مفهوم التجربة العشوائية بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - ما المقصود بالتجربة العشوائية؟ تجربة لها عِدَّة نواتج معروفة مُقدَّمًا، وفيها يتعذَّر الجزم بالنتيجة قبل إجراء التجربة. وعند تكرار التجربة، قد تظهر نواتج مختلفة من دون نظام مُعيَّن أو نمط مُحدَّد.
  - أذكر مثالًا على تجربة عشوائية.

    إلقاء قطعة نقد، ثم ملاحظة الوجه العلوي.

    إلقاء حجر نرد، ثم تسجيل عدد النقاط على الوجه العلوي.

    سحب كرة من وعاء فيه كرات حمراء وسوداء وبيضاء، ثم تسجيل لون كلٍّ منها.
  - ماذا تُسمّى مجموعة جميع النواتج المُتوقَّعة للتجربة العشوائية؟ الفضاء العيني Ω.
  - ما الحادث؟ مجموعة جزئية من الفضاء العيني الذي يتراوح عدد عناصره بين صفر وعدد عناصر Ω.
  - ما أنواع الحادث؟ حادث مستحيل، وحادث بسيط، وحادث أكيد يساوي Ω.
  - ما عناصر الفضاء العيني لتجربة رمي قطعتي نقد متمايزتين، وتسجيل الوجه الظاهر عليهما؟

    $(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$
  - ما عناصر الفضاء العيني لتجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا، وتسجيل عدد النقاط الظاهرة على الوجه العلوي؟

    $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1,5), (1, 6), \ldots (6, 6)$، وعددها 36 زوجًا.

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - أين يُمكِن أنْ يستقرَّ السهم في الرمية الأولى؟ في المنطقة الحمراء، أو المنطقة الزرقاء، أو المنطقة الخضراء، أو المنطقة الصفراء.
  - ما عدد النقاط التي يُمكِن تسجيلها في الرمية الأولى؟ 1, 2, 3, 5
  - ما عدد النقاط التي يُمكِن تسجيلها في الرمية الثانية؟ 1, 2, 3, 5
  - ماذا يُمكِن أنْ تكون نتيجة الرميتين معًا؟ أيُّ زوج مُرتَّب، مثل: (x, y)، حيث: $x \in \{1, 2, 3, 5\}, y \in \{1, 2, 3, 5\}$
  - ما عدد نواتج الرميتين؟ 16 زوجًا مُرتَّبًا.
  - ما فضاء العيِّنة لتجربة رمي السهمين، وتسجيل عدد النقاط في الرميتين؟

$\{(1,1), (1, 2), (1. 3), (1, 5), (2,1), (2, 2), (2. 3), (2, 5),$
$(3,1), (3, 2), (3. 3), (3, 5), (5,1), (5, 2), (5. 3), (5, 5)\}$

- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بطرائق كتابة عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية (مُخطَّط الشجرة، الجدول، القائمة المنظمة)، وتحديد عدد عناصر Ω.
- أُوضِّح للطلبة أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل عنصر من عناصر الفضاء العيني بعدد حقيقي وَفق قاعدة ما. فمثلًا، يُمكِن تعريف مُتغيِّر عشوائي، يُرمَز إليه بحرف كبير X، على الفضاء العيني لتجربة تسجيل جنس مولود بحسب تسلسل الولادة للعائلات ذات الطفلين، بأنَّه يدلُّ على عدد الأولاد الذكور، أو عدد الإناث. وفي كلتا الحالتين، تكون قِيَم X : 0، أو 1، أو 2.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، الذي يُبيِّن طريقة إيجاد مجموعة القِيَم التي يأخذها المُتغيِّر العشوائي بكتابة عناصر Ω، ثم ربط كل نتيجة بعدد حقيقي يُمثِّل عدد الصور في تلك النتيجة.

- أُبيِّن للطلبة أنَّ المُتغيِّر العشوائي في هذا المثال يأخذ مجموعة قِيَم مُنتهية وقابلة للعد (عددها محدود، ومُتباعِدة)، وأنَّ هذا المُتغيِّر يُسمّى المُتغيِّر العشوائي المنفصل.
- أُوضِّح للطلبة أنَّه في أيِّ تجربة عشوائية، مثل قياس أطوال طلبة الصف الحادي عشر، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي على طول الطالب، فإنَّ هذا المُتغيِّر يأخذ مجموعة من القِيَم المحصورة في فترة مُحدَّدة لا يُمكِن معرفة عدد عناصرها، وتحوي أعدادًا صحيحةً، وكسورًا، وأعدادًا حقيقيةً أخرى مثل الجذور، وأنَّ هذا المُتغيِّر يُسمّى المُتغيِّر العشوائي المُتَّصِل.

إرشاد: أَلفِت انتباه الطلبة إلى أنَّ جميع المُتغيِّرات العشوائية في هذا الدرس هي مُتغيِّرات عشوائية منفصلة.

مثال إضافي:

في تجربة سحب كرتين عشوائيًّا من وعاء فيه 4 كرات مُرقَّمة بالأرقام: 1, 2, 2, 4، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين، فأجد مجموعة قِيَم X في الحالتين الآتيتين:

a) السحب مع الإرجاع. $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

b) السحب من دون إرجاع. $X = \{3, 4, 5, 6\}$

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة أنَّ عدد العناصر يكون كبيرًا في بعض التجارب؛ ما يجعل تحديد القِيَم العددية للمُتغيِّر العشوائي صعبًا. وفي هذه الحالة، لا توجد حاجة إلى رصد جميع العناصر، وإنَّما يكفي تحديد أكبر قيمة للمُتغيِّر العشوائي وأصغر قيمة له، ثم كتابة بقية قِيَم المُتغيِّر العشوائي التي تقع بين هاتين القيمتين.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 2 بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
  - لماذا كان عدد عناصر الفضاء العيني 2^4؟ لأنَّ لكل سحبة نتيجتين مُمكِنتين (زرقاء، أو خضراء)، ولأربع سحبات 16 نتيجة $(2 \times 2 \times 2 \times 2)$.
  - كيف تُكتَب جميع النواتج المُمكِنة؟ باستعمال مُخطَّط الشجرة، أو القائمة المنظمة.
  - ما أصغر قيمة للمُتغيِّر العشوائي؟ لماذا؟ 0؛ لأنَّه عند سحب 4 كرات فقد لا تظهر أيُّ كرة زرقاء.
  - ما أكبر قيمة للمُتغيِّر العشوائي؟ لماذا؟ 4؛ لأنَّه عند سحب 4 كرات فقد تكون جميع هذه الكرات زرقاء، ولا يُمكِن أنْ يتجاوز عدد الكرات الزرقاء عدد الكرات المسحوبة.

تنويع التعليم:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط استعمال مُخطَّط الشجرة لكتابة الفضاء العيني لتجارب عشوائية، مثل تجربة رمي 3 قطع نقد، أو سحب كرتين من وعاء فيه كرتان حمراوان، وكرة واحدة سوداء إذا كان السحب مع الإرجاع، وكان السحب من دون إرجاع.

بعد ذلك أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط استعمال القائمة المنظمة لكتابة الفضاء العيني، وذكر أمثلة على مُتغيِّرات عشوائية، وكتابة تعريفها، وكذلك كتابة مجموعة القِيَم التي تأخذها هذه المُتغيِّرات، ثم عرضها أمام طلبة الصف؛ لإبداء آرائهم بخصوص تلك الأمثلة.

عند تحديد القِيَم العددية للمتغير العشوائي، يُمكِن أحيانًا تحديد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغير العشوائي، ثم كتابة بقية قِيَمه بين هاتين القيمتين.

مثال 2

إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء في تجربة سحب 4 كرات عشوائيًّا معًا من كيس فيه 10 كرات زرقاء مُرقَّمة من 1 إلى 10، و8 كرات خضراء مُرقَّمة من 1 إلى 8، فأجد مجموعة قِيَم X.

أفترض أنَّ B يعني كرة زرقاء، وأنَّ G يعني كرة خضراء.

ألاحِظ أنَّ عدد عناصر Ω هو:

$$2^4 = 16$$

وهذا عدد كبير نسبيًّا. ونظرًا إلى عدم الحاجة إلى رصد جميع العناصر؛ سأكتفي بتحديد بعضها لمعرفة قِيَم X:

العنصر (4 خضراء)، والعنصر (4 زرقاء) $\Omega = \{(G, G, G, G), \quad \ldots \quad , (B, B, B, B)\}$

عدد الكرات الزرقاء المرتبط بالعنصر $X = \quad 0 \quad \ldots \quad 4$

ألاحِظ أنَّ قِيَم المتغير العشوائي X تتراوح بين 0 و4:

نماذج من بقية العناصر

$(B, G, G, G) \rightarrow 1,$

$(B, B, G, G) \rightarrow 2,$

$(B, B, B, G) \rightarrow 3$

إذن، مجموعة قِيَم المتغير العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

أتعلَّم

عدد عناصر الفضاء العيني عند اختيار n من عناصر نوعين مختلفي اللون من الكرات هو 2^n

أتعلَّم

العناصر (G, G, G, B)، (G, G, B, G) (G, B, G, G)، (B, G, G, G) جميعها متشابهة، وكلٌّ منها يرتبط بالعدد 1

أتحقَّق من فهمي

في تجربة إلقاء 3 قطع نقد متمايزة عشوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قِيَم X. $X = \{0, 1, 2, 3\}$

68

إرشاد: أُناقِش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

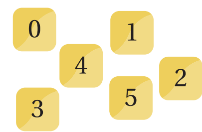
مثالان إضافيان:

1. أجرى طبيب 10 عمليات جراحية في أحد المستشفيات. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد العمليات الناجحة من بين العمليات العشر، فما مجموعة قِيَم X؟ $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
2. يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء، و3 كرات زرقاء. إذا سُحِبت من الصندوق 4 كرات عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فما مجموعة قِيَم X؟ $\{1, 2, 3\}$

تتطلَّب بعض المواقف تحديد عناصر حادث مُعيَّن في الفضاء العيني، مرتبط بقيمة مُحدَّدة من قِيَم المتغير العشوائي في التجربة. ففي تجربة إلقاء قطعتي نقد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فإنَّ عنصر الحادث $C = \{(H, T)\}$ يرتبط بالقيمة 1، وعنصر الحادث $D = \{(T, T)\}$ يرتبط بالقيمة 0، وعنصر الحادث $E = \{(H, H)\}$ يرتبط بالقيمة 2

مثال 3

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 8$.



أفترض أنَّ الحادث المطلوب هو A، فتكون عناصره هي الأزواج المُرتَّبة التي مجموع إحداثييها 8:

المجاميع المُمكِنة للعدد 8 باستعمال البطاقات $\quad 3 + 5 = 8 \,, 5 + 3 = 8 \,, 4 + 4 = 8$

عناصر الحادث A $\quad A = \{(3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$

أتعلَّم

ألاحِظ أنَّ المجموع $4 + 4$ مُمكِن؛ لأنَّ السحب مع الإرجاع.

أتذكَّر

السحب من دون إرجاع يعني عدم إمكانية ظهور المسحوب أولًا في السحبة التالية.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$. $\{(0, 4), (4, 0), (1, 3), (3, 1)\}$

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة عند كتابة الحادث الذي ترتبط عناصره بمجموع مُعيَّن، مثل $X = 5$، في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا مع الإرجاع من مجموعة بطاقات مُرقَّمة بالأرقام: 4 ,3 ,2 ,1؛ فقد يكتبون العنصر $(2, 3)$ والعنصر $(1, 4)$ فقط، ولا يذكرون العنصر $(3, 2)$ والعنصر $(4, 1)$؛ لذا أُحفِّز الطلبة على كتابة جميع عناصر Ω باستعمال مُخطَّط الشجرة، أو الجدول، أو القائمة المنظمة، ثم اختيار العناصر المُرتبِطة بمجموع مُعيَّن؛ لكيلا يغفلوا عن بعض عناصر الحادث.

مثال 3

- أُوضِّح للطلبة أنَّ كل قيمة من قِيَم المُتغيِّر العشوائي X ترتبط بعنصر واحد أو أكثر من عناصر الفضاء العيني.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، ثم أطلب إليهم كتابة جميع عناصر الفضاء العيني، وتحديد قيمة X المُقابِلة لكل عنصر، ثم كتابة العناصر المُرتبِطة بكل قيمة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال بافتراض أنَّ السحب من دون إرجاع.

مثال إضافي:

سُجِّل جنس كل طفل بحسب تسلسل الولادة في العائلات التي لديها 4 أطفال. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد البنات، فأكتب الحادث الذي ترتبط عناصره بالقيمة $X = 2$ (أستعمل الرمز G للبنت، والرمز B للولد).

$\{(B, B, G, G), (B, G, G, B), (B, G, B, G),$
$(G, B, B, G), (G, G, B, B), (G, B, G, B)\}$

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (6–1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (11– 9).
- أتجوَّل بين أفراد المجموعات مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (9 – 7) كتاب التمارين: 1, 3, 5
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (9 – 7) كتاب التمارين: 2, 4, 6
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (11 – 8) كتاب التمارين: (7 – 4)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
  - يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء، و7 كرات زرقاء، و8 كرات صفراء. إذا سُحِبت منه 3 كرات عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الكرات التي لها اللون نفسه في العيِّنة المسحوبة، فما مجموعة قِيَم X؟ وما الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 2$؟

$X = \{0, 2, 3\}$,

$A = \{RRB, RRY, YYB, YYR, BBR, BBY\}$

6 الختام

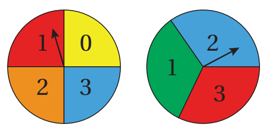
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى كل ثنائي كتابة مسألة عن تجربة عشوائية ومُتغيِّر عشوائي مُعرَّف على الفضاء العيني لتلك التجربة، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات تبادل المسائل؛ ليجيب كلٌّ منهم عن مسألة الآخر.
- أُقدِّم التغذية الراجعة لأفراد المجموعات كلها، وأتحقَّق من صحَّة الإجابات.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

3 2 1

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا من البطاقات الظاهرة في الشكل المجاور، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على حاصل ضرب العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد مجموعة قِيَم X في الحالات الآتية:

1. السحب على التوالي مع الإرجاع. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$
2. السحب على التوالي من دون إرجاع. $\{2, 3, 6\}$
3. سحب البطاقتين معًا. $\{2, 3, 6\}$



إذا دُوِّر مُؤشِّرا القرصين عشوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قِيَم المتغير العشوائي X إذا دلَّ على:

4. مجموع العددين. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
5. القيمة المطلقة للفرق بين العددين. $\{0,1, 2, 3\}$
6. حاصل ضرب العددين. $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$
7. في تجربة سحب 3 كرات عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 2$.
$\{(R, R, Y), (Y, R, R), (R, Y, R), (R, R, G), (G,R, R), (R, G, R)\}$
8. أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).
8 مجاميع مختلفة هي: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

مهارات التفكير العليا

(11–9)، أنظر الهامش.

9. **مسألة مفتوحة:** أَصِف موقفًا تكون فيه قِيَم المتغير العشوائي X: 0، 1، 2
10. **تبرير:** في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من صندوق يحوي 3 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة بأحد الأرقام: 1 ,3 ,5 ، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، وكانت قِيَمه: 2 ,4 ,6 ,8 ,10، فأُحدِّد إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، مُبرِّرًا إجابتي.
11. **تحدٍّ:** أَصِف موقفًا حياتيًّا تكون فيه بعض قِيَم المتغير العشوائي موجبة، وبعض قِيَمه الأُخرى سالبة.

70

إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

9) ستختلف إجابات الطلبة.
إجابة مُحتمَلة: أُلقِيت قطعة نقد منتظمة مَرَّتين متتاليتين، وسُجِّل الوجه الظاهر كل مَرَّة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات ظهور الصورة (H)، فما مجموعة قِيَم X؟

10) السحب مع الإرجاع؛ لأنَّه لا يُمكِن للعددين 2، 10 أنْ يكونا من قِيَم المُتغيِّر العشوائي، إلّا إذا تكرَّر سحب البطاقة التي تحمل الرقم 1، والبطاقة التي تحمل الرقم 5.

11) ستختلف إجابات الطلبة.
إجابة مُحتمَلة: أُلقِي حجر نرد مَرَّتين متتاليتين، وسُجِّل الرقم الظاهر على الوجه العلوي كل مَرَّة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على ناتج طرح العدد الظاهر في الرمية الثانية من العدد الظاهر في الرمية الأولى، فما مجموعة قِيَم X؟

الدرس 3

احتمال المتغير العشوائي
Probability of a Random Variable

فكرة الدرس إيجاد احتمالات قِيَم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات التوزيع الاحتمالي.

مسألة اليوم عند إلقاء حجري نرد متمايزين مرَّة واحدة، وتسـجيل مجموع العددين الظاهرين، ما المجموع الذي احتماله أكبر؟

أتعلَّم مجال التوزيع الاحتمالي هـو مجموعـة قِيَـم المتغيـر العشـوائي، ومداه هـو مجموعة قِيَم الاحتمالات المقابلة.

التوزيع الاحتمالي (probability distribution) للتجربة العشـوائية هـو اقتران يربط قِيَم المتغير العشـوائي باحتمـالات وقوعها في التجربـة، ويُرمَز إلى اقتـران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$، وقد يُكتَب في صورة $P(X = x)$.

تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّه عند إلقـاء قطعتي نقد متمايزتين مرَّة واحدة، فإنَّ قِيَم المتغير العشـوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إنَّ الفضاء العيني لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

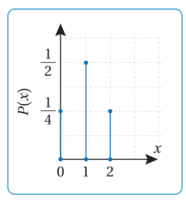
وبذلك تكون قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}\ ,\ P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ ,\ P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

يُمكِن أيضًا التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني.

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

توزيع احتمالي



71

الدرس 3

نتاجات الدرس

- إيجـاد احتمـال قِيَـم المُتغيِّـر العشـوائي فـي تجربـة عشوائية.
- تعرُّف التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّر عشوائي، وخصائصه.
- كتابـة التوزيـع الاحتمالـي لمُتغيِّـر عشـوائي، وتمثيله بطرائق مختلفة.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد قِيَم المُتغيِّر العشوائي في تجربة عشوائية.
- إيجـاد الحـادث الـذي ترتبط عناصره بقيمـة مُحدَّدة للمُتغيِّر العشوائي.
- إيجاد احتمالات حوادث بسيطة وأخرى مُركَّبة.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّـه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطـة بمـا سـيُقدَّم مـن موضوعـات الـدرس فـي الحصـة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أسـتعد لدراسـة الوحـدة) فـي كتـاب التمارين، ثـم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجـوَّل بين الطلبـة؛ لمتابعتهـم أثناء الحـل، وتحديد نقـاط ضعفهـم، وأُوجِّههم إلى مراجعـة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُراجِـع الطلبة فـي مفهـوم المُتغيِّر العشـوائي، والقِيَم التي يأخذها، بطرح السؤالين الآتيين عليهم:
- ما المُتغيِّر العشـوائي؟ اقتران يربط فضاء العيِّنة لتجربة عشوائية بمجموعة الأعداد الحقيقية، وتُحدَّد قِيَمه من نواتج تلك التجربة.
- أذكـر مثالًا علـى مُتغيِّر عشـوائي، ثم أكتـب مجموعة القِيَم التي يأخذها. ستختلف إجابات الطلبة.

- أُذكِّـر الطلبـة بكيفية إيجـاد احتمال حـوادث بسـيطة وأخرى مُركَّبـة، وصيغة احتمال الحادث، وذلك بطرح السؤال الآتي عليهم:
  - أُلقِي حجر نرد منتظم مرَّة واحدة. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

1. ظهور الرقم 6 $\frac{1}{6}$
2. ظهور عدد أوَّلي. $\frac{1}{2}$
3. ظهور عدد أكبر من 4 $\frac{1}{3}$
4. ظهور عدد أكبر من 6 0
5. ظهور عدد أصغر من 6 أو يساوي 6 1

إرشـاد: أكتب بعـض إجابات الطلبة على اللوح، ثم أُناقِشـها مع بقية الطلبة، وأطلب إليهم تصويبها إنْ لم تكن صحيحة.

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ما عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة إلقاء حجري النرد؟ $6^2 = 36$
  - ما المُتغيِّر العشوائي في هذه المســألة؟ مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لحجري النرد.
  - ما القِيَم التي يأخذها هذا المُتغيِّر العشوائي؟ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
  - ما الحادث الذي ترتبط عناصره بالمجموع 2؟ ما احتماله؟ $\{(1,1)\}; \frac{1}{36}$
  - ما الحادث الذي ترتبط عناصره بالمجموع 5؟ ما احتماله؟ $\{(1,4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}; \frac{1}{9}$
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1

- أُذكِّر الطلبة بكتابة القِيَم التي يأخذها المُتغيِّر العشوائي، وكيفية إيجاد الحادث الذي ترتبط عناصره بإحدى قِيَم المُتغيِّر العشوائي.
- أُوضِّـح للطلبة أنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشـوائي هو اقتران يربـط كل قيمة من قِيَم المُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها (أيْ إنَّه يُحدِّد احتمال كل قيمة من قِيَم المُتغيِّر العشوائي)، وأنَّ مجاله هو مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي، ومداه هو مجموعة احتمالات هذه القِيَم.
- أكتب على اللوح المثال الآتي:

فـي تجربة سـحب كرة واحدة عشـوائيًّا مـن وعاء فيه 4 كـرات مُرقَّمة بالرقم 3، و6 كـرات مُرقَّمة بالرقم 5، إذا دلَّ المُتغيِّر العشـوائي X على الرقم الظاهر على الكرة، فإنَّ قِيَم المُتغيِّر العشـوائي X هي: $\{3, 5\}$، وإنَّ احتمال $X = 3$ هو:

$$P(X = 3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ويكون احتمال $X = 5$ هو:

$$P(X = 5) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

وتكون قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X هي:

$$P(X = 3) = \frac{2}{5} \ , \ P(X = 5) = \frac{3}{5}$$

يُمكِن التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	3	5
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

ألاحِظ أنَّ مجموع قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي (الجدول، أو التمثيل البياني) هو 1، حيث:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$$

مفهوم أساسي — **اقتران التوزيع الاحتمالي**

بالكلمات: إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا، فإنَّ مجموع قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي $P(X)$ هو 1

بالرموز: إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا، فإنَّ:

$$\sum P(X)=1$$

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

الخطوة 1: أجد قِيَم المتغير العشوائي.

$$X=\{1,2,3,4,5,6\}$$

الخطوة 2: أجد احتمال كل قيمة من قِيَم المتغير العشوائي.

$$P(1)=\frac{1}{6}\ ,P(2)=\frac{1}{6}\ ,P(3)=\frac{1}{6}$$

$$P(4)=\frac{1}{6}\ ,P(5)=\frac{1}{6}\ ,P(6)=\frac{1}{6}$$

الخطوة 3: أُنشِئ جدولًا من صفين أُنظِّم فيه قِيَم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكلٍّ منها.

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ألاحِظ أنَّ مجموع الاحتمالات هو 1:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

أتعلَّم

يُطلَق على التوزيع الاحتمالي الذي تكون فيه جميع الاحتمالات متساوية اسم التوزيع المنتظم.

72

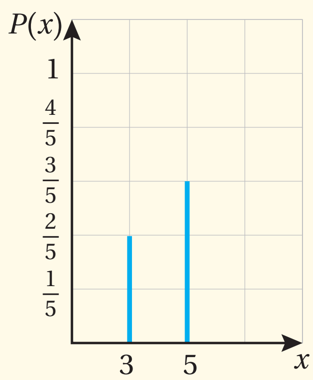
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها، مثل التوزيع الاحتمالي (probability distribution).

وكذلك يُمكِن تمثيله بيانيًّا بالأعمدة، برسم عمود من كل قيمة على المحور x، ارتفاعه يساوي قيمة الاحتمال كما في الرسم الآتي:



- أسأل الطلبة عن ملاحظاتهم على قِيَم $P(x)$؛ لاستنتاج أنَّ مجموع قِيَم $P(x)$ يساوي 1 دائمًا.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، الذي يُبيِّن خطوات إيجاد التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي، وأُشارِكهم تنفيذ الخطوات وتبريرها.

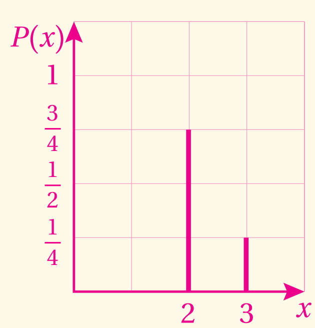
إرشادات:

- أُوجِّه الطلبة إلى ضرورة التحقُّق من أنَّ مجموع الاحتمالات يساوي 1.
- أَلفِت انتباه الطلبة إلى ملاحظة أنَّ جميع احتمالات التوزيع الاحتمالي في المثال 1 متساوية؛ ما يعني أنَّه توزيع مُنتظِم.

مثال إضافي:

أُلقِيت 3 قطع نقد متمايزة معًا مَرَّة واحدة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد القطع التي يظهر عليها الوجه نفسه، فأجد التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X في صورة جدول وتمثيل بياني.

x	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$



مثال 2

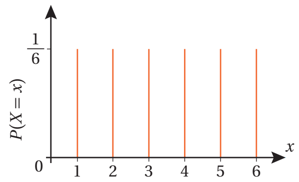
- أُوضِّح للطلبة أنَّ مجموع احتمالات التوزيع الاحتمالي يساوي 1؛ لذا يُمكِن إيجاد أيِّ احتمالات مجهولة في جدول التوزيع الاحتمالي، وإيجاد احتمالات قِيَم مُحدَّدة للمُتغيِّر العشوائي تُحقِّق شروطًا مُعيَّنة، كأنْ تكون واقعة بين قيمتين معلومتين، أو تزيد على قيمة مُعيَّنة، أو تقلَّ عنها.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 1 من المثال 2 على اللوح.
- أُناقِش الطلبة في حل الفرع 2 من المثال 2 بطرح السؤالين الآتيين عليهم:
  - لماذا جُمِع $P(X=1)$ مع $P(X=2)$ في الفرع 2؟ لأنَّ هاتين القيمتين هما الوحيدتان اللتان تُحقِّقان المتباينة: $1 \le X < 3$، ولأنَّ الحادث $X=1$ والحادث $X=2$ متنافيان (منفصلان).
  - كيف أجد قيمة $P(X \ge 1)$؟ بجمع $P(X=1)$ مع $P(X=2)$ ومع $P(X=3)$ ومع $P(X=4)$، أو بإيجاد احتمال الحادث المُتمِّم: $P(X \ge 1) = 1 - P(X=0)$.
- أستمع لإجابة أحد الطلبة عن السؤال السابق، ثم أسأل زملاءه:
  - أيُّكم يُوافِقه الرأي؟
  - مَنْ لديه إجابة أخرى؟ اذكرها.

إرشاد: يهدف السؤال المُتعلِّق بمعرفة رأي الطلبة في إجابة زميلهم وتقديم إجابات أخرى إلى تعزيز مهارات التواصل لدى الطلبة، والتعبير الحر عن الرأي، واحترام الرأي الآخر.

أسهم العالِم الفرنسي بليز باسكال في اكتشاف المبادئ والنظريات المُتعلِّقة بالتباديل والتوافيق في القرن السابع عشر الميلادي؛ ما أدّى إلى تطوُّر حساب الاحتمالات بصورة كبيرة.

2 **التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.**

أضع قِيَم المتغير العشوائي على المحور الأفقي، وقِيَم الاحتمال المقابلة لها على المحور الرأسي، ثم أرسم الأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور.



أتحقَّق من فهمي

في تجربة سحب بطاقة عشوائيًّا من مجموعة بطاقات مُرقَّمة بالأرقام: 8 ,6 ,5 ,4 ,2، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على الرقم الظاهر على البطاقة المسحوبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. أنظر ملحق الإجابات.

b) التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات.

إنَّ معرفة مجموع احتمالات قِيَم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية تساعد على إيجاد احتمالات مجهولة، واحتمالات ضمن شروط مُحدَّدة على قِيَم المتغير العشوائي.

مثال 2

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

1 **أجد قيمة a.**

$0.1 + a + 0.3 + a + 0.1 = 1$ لأنَّ $\sum P(x) = 1$

$2a + 0.5 = 1$ بتجميع الحدود المتشابهة

$2a = 0.5$ بطرح 0.5 من طرفي المعادلة

$a = 0.25$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

مثال إضافي:

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-1	0	1	4
$P(X=x)$	0.25	a	0.31	$3a$

1. أجد قيمة a. 0.11
2. أجد $P(X \ge 1)$. 0.64
3. أجد $P(X < 4)$. 0.67
4. أجد $P(-1 < X \le 1)$. 0.42

2 أجد $P(1 \le x < 3)$.

بتحديد قِيَم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدَّد: $P(1 \le x < 3) = P(x=1) + P(x=2)$

بتعويض قِيَم الاحتمالات: $= 0.25 + 0.3$

بالجمع: $= 0.55$

أتحقَّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	b	0.2	$2b$

1 أجد قيمة b. $b = 0.2$

2 أجد $P(2 \le x \le 4)$. $P(2 \le X \le 4) = 0.8$

أتذكَّر

لأيِّ حادث A في الفضاء العيني لتجربة عشـوائية، فإنَّ: $P(A)+P(\bar{A})=1$

يُمكِن أيضًا تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي X فـي صورة مجموعة من الأزواج المُرتَّبة التي إحداثيات x لها مجموعة قِيَم المتغير العشـوائي، وإحداثيـات y لها مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بقِيَم المتغير العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, k), (3, k), (4, k)\}$$

1 أجد قيمة k.

لأنَّ $\sum P(x) = 1$: $2k + k + k + k = 1$

بتجميع الحدود المتشابهة: $5k = 1$

بقسمة طرفي المعادلة على 5: $k = 0.2$

74

مثال 3

- أعـرض طريقة أخـرى لتمثيل التوزيـع الاحتمالي في صورة أزواج مُرتَّبة، مسـاقطها الأولـى (الإحداثي x) قِيَم المُتغيِّر العشوائي، ومساقطها الثانية (الإحداثي y) الاحتمـالات المُناظِرة لِقِيَـم المُتغيِّر العشـوائي، مُبيِّنًا كيف يُمكِن الانتقال من الجدول إلى الأزواج المُرتَّبة، وإلى التمثيل البياني، والعكس بالعكس.
- أُناقِـش الطلبـة فـي حل المثـال 3 على اللـوح، مُؤكِّدًا ضـرورة تبرير كل خطـوة من خطـوات الحل، والتعبير عن هذا التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

مثال إضافي:

فـي تجربـة عشـوائية، كان التوزيع الاحتمالـي للمُتغيِّر العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 0.15), (2, 0.24), (3, k), (4, 2k), (5, 0.1)\}$$

1 أجد قيمة k.

2 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

3 أجد $P(X \ge 2)$.

4 أُمثِّل التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بيانيًّا.

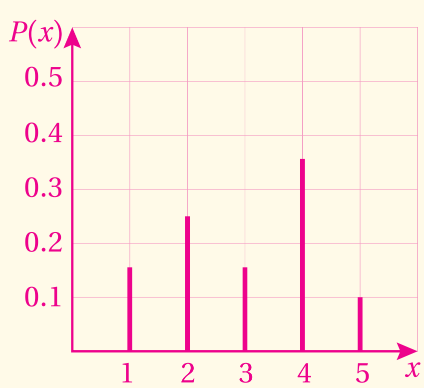
1) $k = 0.17$

2)

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.15	0.24	0.17	0.34	0.1

3) $P(X \ge 2) = 0.85$

4)



مثال 4

- أُوضِّح للطلبة أنَّ بعض التجارب العشوائية تتطلَّب استعمال التباديل والتوافيق لإيجاد احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي، ثم إنشاء جدول توزيعه الاحتمالي.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مؤكِّدًا ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي:

اختارت زينب رقمين معًا عشوائيًّا من بين أرقام العدد 113333555. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الخمسات التي اختارتها زينب، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X.

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

2 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.2	0.2	0.2

أتعلَّم

$P(x\leq3) = 1 - P(x=4)$
$= 1 - 0.2$
$= 0.8$

3 أجد $P(x \leq 3)$.

$P(x \leq 3) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$ بتحديد قِيَم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدَّد

$= 0.4 + 0.2 + 0.2$ بتعويض قِيَم الاحتمالات

$= 0.8$ بالجمع

أتحقَّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, 2k), (3, 3k), (4, 3k)\}$$

1 أجد قيمة k. $k = 0.1$

2 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

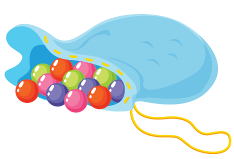
x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.2	0.2	0.3	0.3

3 أجد $P(x \geq 3)$. $P(X \geq 3) = 0.6$

يُمكِن حساب احتمالات قِيَم المتغير العشوائي باستعمال مبدأ العَدِّ، والتباديل، والتوافيق.

مثال 4

في تجربة سحب 3 كرات عشوائيًّا معًا من كيس فيه 3 كرات حمراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.



الخطوة 1: أجد قِيَم المتغير العشوائي.

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

إرشاد:

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن إيجاد الاحتمالات أحيانًا باستعمال التوافيق، وقانون احتمال وقوع حادثين أو أكثر معًا، بضرب احتمالات هذه الحوادث بعضها في بعض. فمثلًا، يُمكِن إيجاد احتمال سحب 3 كرات حمراء دفعة واحدة (أو على التوالي من دون إرجاع) من وعاء فيه 4 كرات حمراء، و6 كرات بيضاء بالطريقتين الآتيتين:
  - قسمة عدد طرائق سحب 3 كرات حمراء من بين 4 كرات حمراء على عدد طرائق سحب 3 كرات من بين 10 كرات موجودة في الوعاء؛ أيْ إنَّ: $P(3 \text{ Red}) = \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{4}{120}$.
  - ضرب احتمال أنْ تكون الكرة الأولى حمراء في احتمال أنْ تكون الكرة الثانية حمراء في احتمال أنْ تكون الكرة الثالثة حمراء؛ أيْ إنَّ: $P(3 \text{ Red}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{4}{120}$.

الخطوة 2 : أجد احتمالات قِيَم المتغير العشوائي.

0 كرة حمراء، و3 كرات خضراء $P(x=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$

كرة حمراء واحدة، وكرتان خضراوان $P(x=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$

كرتان حمراوان، وكرة خضراء واحدة $P(x=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$

3 كرات حمراء، و0 كرة خضراء $P(x=3) = \frac{{}_3C_3 \times {}_4C_0}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$

الخطوة 3 : أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ المثال 4 إذا كان السحب على التوالي بدون ارجاع. أنظر ملحق الإجابات.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في تجربة إلقاء 3 قطع نقد متمايزة عشوائيًّا، دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة:

1 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. أنظر ملحق الإجابات.

2 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	a	0.2	a

3 أجد قيمة a. $a = 0.35$

4 أجد $P(1 < x \leq 3)$. 0.55

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(0, 2k), (1, 0.5k), (2, 2k), (3, 0.5k)\}$$

5 أجد قيمة k. $k = 0.2$

6 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات.

7 أجد $P(x \geq 2)$. 0.5

76

المفاهيم العابرة للمواد:

أُؤكِّد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي السؤال 10، أُعزِّز لدى الطلبة الوعي بالقضايا الأخلاقية، بتقدير الوقت، واحترام المواعيد، وعدم إخلافها، واحترام أوقات الآخرين، وتقدير الخدمة التي تُقدَّم لهم، وبذل الجهد للقيام بالواجب المطلوب. ثم أسألهم:

- ما رأيكم في تأخُّر بعض الطلبة المُتوقَّع تخرُّجهم عن موعد لقائهم بالمُحاضِر؟
- ما الذي ينبغي لنا فعله لقاء خدمة تطوُّعية تُقدَّم لنا؟

أخطاء شائعة: قد يُخطِئ بعض الطلبة في إيجاد احتمال قِيَم المُتغيِّر العشوائي؛ بأنْ يغفلوا عن بعض العناصر المُرتبِطة بتلك القِيَم؛ لذا أُحفِّز الطلبة على كتابة جميع العناصر المُرتبِطة بكل قيمة من قِيَم المُتغيِّر العشوائي للتأكُّد من إيجاد الاحتمال الصحيح، وأُذكِّرهم بأنَّ مجموع احتمالات جميع قِيَم المُتغيِّر العشوائي يساوي دائمًا 1.

4 التدريب

أتدرَّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1–7) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (11–13).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (8 – 10) كتاب التمارين: (1 – 6)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (9 – 11) كتاب التمارين: 5, 7, 9, 11
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (10 – 13) كتاب التمارين: (9 – 12)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الآتية بوصفها إثراءً لهم:

1 أُلقِيت 3 أحجار نرد متمايزة معًا مَرَّة واحدة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الأحجار التي يظهر على وجهها العلوي نفس عدد النقاط، فأَنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

x	0	2	3
$P(X=x)$	$\frac{120}{216}$	$\frac{90}{216}$	$\frac{6}{216}$

2 يحتوي صندوق على 100 آلة حاسبة، منها 5 آلات غير صالحة. إذا سحب عامل ضبط الجودة آلتين عشوائيًا من الصندوق من دون إرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي Y على عدد الآلات غير الصالحة المسحوبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y.

y	0	1	2
$P(Y=y)$	$\frac{8930}{9900}$	$\frac{950}{9900}$	$\frac{20}{9900}$

3 سحبت ريم 3 بطاقات معًا عشوائيًا من وعاء فيه 4 بطاقات كُتِب الرقم 3 على كل واحدة منها، و6 بطاقات كُتِب الرقم 4 على كل واحدة منها. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الأرقام المكتوبة على البطاقات الثلاث التي سحبتها ريم، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

x	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{4}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{20}{120}$

8 في تجربة سحب كرتين عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X. أنظر ملحق الإجابات.

9 أَحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). المجموع 7 هو الأكبر احتمالًا، واحتماله يساوي $\frac{6}{36}$

10 مواعيد: تُنظِّم محاضرة جامعية مواعيد لأربعةٍ من طلبتها المُتوقَّع تخرُّجهم، في الساعة المُخصَّصة لعملها المكتبي كل يوم خميس. وبحسب خبرتها، فإنَّ عدد مَنْ يتأخَّرون عن موعد الساعة المكتبية من هؤلاء الطلبة يُمكِن تمثيله بمتغير عشوائي X، وإنَّ التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي هو كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.25	$4k$	$2k$	k

أجد احتمال تأخُّر اثنين من هؤلاء الطلبة – على الأقل – عن موعد الساعة المكتبية يوم الخميس.

$P(X \geq 2) = 7k = 0.35$

مهارات التفكير العليا

11 تحدٍّ: أجد قيمة k إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$\{(1, 0.1x), (2, 0.1x), (3, 0.1x), (4, k)\}$

$0.1 \times 1 + 0.1 \times 2 + 0.1 \times 3 + k = 1$

$\Rightarrow k = 0.4$

12 تحدٍّ: أجد المنوال للتوزيع الاحتمالي إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

$a = 0.25$

$\Leftarrow$ المنوال هو 2 (القيمة المُقابِلة لأعلى احتمال)

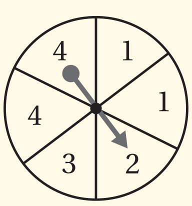
13 أكتب: أيُّ طرائق التعبير عن التوزيع الاحتمالي أفضل؟ أُبرِّر إجابتي.

ستختلف إجابات الطلبة. أقبل أيَّ إجابة مع تبرير مناسب لها.

6 الختام

- أتحقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

◂ دُوِّر مُؤشِّر القرص المجاور مَرَّتين متتاليتين، واستقرَّ على أحد الأرقام في كلٍّ منهما، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الرقمين اللذين استقرَّ عليهما المُؤشِّر. أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.



x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$

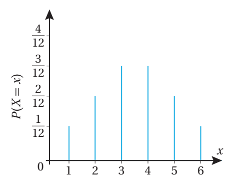
الدرس 4

توقُّع المتغير العشوائي
Expectation of a Random Variable

فكرة الدرس إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات توقُّع المتغير العشوائي، تباين المتغير العشوائي.

مسألة اليوم مثَّلت تغريد التوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية كما في الشكل المجـاور، ثـم أرادت إيجاد الوسـط الحسـابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع، كيف يُمكِنها ذلك؟



تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد الوسط الحسابي ($\overline{x}$) لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القِيَم في تكراراتها ($\sum x.f$) على مجموع التكرارات ($\sum f$) باستعمال الصيغة الآتية:

$$\overline{x} = \frac{\sum x.f}{\sum f}$$

وبالمثل، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قِيَم المتغير العشوائي X تُمثِّل تكرارات لتلك القِيَم (تكرارات نسبية؛ نظرًا إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قِيَم المتغير العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو $\sum x.P(x)$، في ما يُعرَف باسم **التوقُّع** (expectation) للمتغير العشوائي X، ويُرمَز إليه بالرمز $E(x)$.

لغة الرياضيات
يُطلَق على التوقُّع للمتغير العشوائي في التوزيع الاحتمالي اسم الوسط الموزون.

مفهوم أساسي التوقُّع

بالكلمات: التوقُّع للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمتغير X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز:

$$E(x) = \sum x.P(x)$$

الدرس 4

نتاجات الدرس

- تعرُّف توقُّع المُتغيِّر العشوائي.
- تعرُّف تباين المُتغيِّر العشوائي.
- إيجاد كلٍّ من التوقُّع، والتباين للمُتغيِّر العشوائي المنفصل.

نتاجات التعلُّم القبلي:

- إيجاد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة، أو بيانات منظمة في جدول تكراري، أو جدول ذي فئات.
- إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي.

مراجعة التعلُّم القبلي:

- أُوجِّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبِطة بما سيُقدَّم من موضوعات الدرس في الحصة (إنْ وُجِدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوَّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأُوجِّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أُراجِع الطلبة في مفهوم الوسط الحسابي، ومفهوم التباين، وطريقة إيجاد كلٍّ منهما، بطرح السؤالين الآتيين عليهم:
- إذا كانت أعمار 6 طلبة إلى أقرب سنة هي: 14، 16، 13، 15، 17، 18، فما الوسط الحسابي لها؟ 15.5
- أُلقِي حجر نرد 20 مَرَّة، وسُجِّلت النتائج في الجدول الآتي:

الرقم الظاهر على الوجه العلوي (x)	1	2	3	4	5	6
عدد المَرّات (f)	2	2	5	3	5	3

◄ أجد الوسط الحسابي والتباين للأرقام الظاهرة على الوجه العلوي لحجر النرد.

الوسط الحسابي: $\mu = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = 3.8$

التباين: $\sigma^2 = \frac{\sum x^2 \cdot f - (\sum f)\,\mu^2}{\sum f} = 2.36$

2 الاستكشاف

- أُوجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم أسألهم:
  - ما مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي X؟ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - ما قيمة $P(X = 3)$؟ $\frac{1}{4}$
  - ما الجدول الذي يُمثِّل التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X؟

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

  - كيف يُمكِن لتغريد إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع؟
- أُخبِر الطلبة أنَّهم سيتعرَّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أُعزِّز الإجابات الصحيحة.

3 التدريس

مثال 1: من الحياة

- أُناقِش الطلبة في طريقة إيجاد الوسط الحسابي لبيانات منظمة في جدول تكراري، مُبيِّنًا أنَّه عند تحويل التكرارات إلى تكرارات نسبية بقسمة كل تكرار على مجموع التكرارات، فإنَّ الجدول التكراري يتحوَّل إلى جدول توزيع احتمالي، وأنَّه يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي للجدول الجديد بالطريقة السابقة نفسها (أيْ ضرب كل قيمة في التكرار النسبي المُقابِل، وجمع نواتج الضرب، وقسمة المجموع على مجموع التكرارات النسبية)، ويُسمّى الوسط الحسابي الناتج توقُّع المُتغيِّر العشوائي. وبما أنَّ مجموع التكرارات النسبية يساوي 1، فإنَّ توقُّع المُتغيِّر العشوائي يساوي مجموع نواتج ضرب قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالتكرار النسبي (الاحتمال).
- أُناقِش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (مفهوم أساسي)، وبيَّنت كيفية إيجاد التوقُّع بالكلمات والرموز.
- أُناقِش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، الذي يُبيِّن طريقة تحويل جدول تكراري إلى جدول توزيع احتمالي، وإيجاد التوقُّع، وأُشارِكهم الحل وتبرير الخطوات.

مثال إضافي:

يُبيِّن الجدول الآتي أعمار 200 طالب وطالبة سجَّلوا في مساق دراسي في إحدى الجامعات الأردنية:

العمر (x)	18	19	20	21	37
عدد الطلبة (f)	70	60	28	40	2

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل العمر، أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X، ثم أجد $E(X)$.

x	18	19	20	21	37
$P(x)$	0.35	0.3	0.14	0.2	0.01

$$E(X) = 18(0.35) + 19(0.3) + 20(0.14) + 21(0.2) + 37(0.01) = 19.37$$

ملاحظات المُعلِّم/ المُعلِّمة

مثال 1 : من الحياة

في مسح عشوائي شمل 100 سيدة من ربّات البيوت لمعرفة عدد اللواتي لديهن أجهزة حاسوب، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

عدد الأجهزة (x)	0	1	2	3
عدد ربّات البيوت (التكرار f)	17	42	31	10

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد أجهزة الحاسوب:

أتذكَّر

ينتج الاحتمال النسبي من قسمة كل تكرار على المجموع الكلي للتكرارات.

1 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

أَقسِم كل تكرار على مجموع التكرارات، ثم أُنشِئ جدولًا للتوزيع الاحتمالي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.17	0.42	0.31	0.1

2 أجد التوقُّع للمتغير العشوائي X.

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X $\qquad E(x) = \sum x.P(x)$

مجاميع حاصل الضرب $\qquad = 0\times0.17 + 1\times0.42 + 2\times0.31 + 3\times0.1$

بالتبسيط $\qquad = 1.34$

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 200 أُسرة لمعرفة عدد حيواناتهم الأليفة:

عدد الحيوانات (x)	0	1	2	3
عدد الأُسر (f)	44	96	52	8

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الحيوانات الأليفة، أجد $E(x)$.

$E(X) = 0(0.22) + 1(0.48) + 2\,(0.26) + 3(0.04) = 1.12$

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حـل التدريب الوارد في بند (**أتحقَّق من فهمي**) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَن أخطأ في الإجابة؛ تجنُّبًا لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أُكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 2

- أُوضِّح للطلبة أنَّه يُمكِن إيجاد قِيَم مجهولة في التوزيع الاحتمالـي، إذا عُلِم توقُّع المُتغيِّر العشـوائي، بتكوين نظام معادلات وحله.
- أُناقِش الطلبـة في حـل المثـال 2 على اللـوح، مُؤكِّدًا ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي:

إذا كان التوزيـع الاحتمالي للمُتغيِّر العشـوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	4	a
$P(X=x)$	0.35	b	0.1	0.25

وكان $E(X)=3.6$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

$a=9, b=0.3$

إذا عُلِمت قيمة التوقُّع $E(x)$ للمتغير العشوائي X، فإنَّه يُمكِن تحديد قِيَم احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي؛ بتكوين نظام من المعادلات الخطية، ثم حلّه بطريقة الحذف والتعويض.

مثال 2

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	a	0.3	b	0.2	0.15

وكان $E(x)=3$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x=3)$، و $P(x=1)$.

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X $\quad E(x)=\sum x.P(x)$

لأنَّ التوقُّع هو 3 $\quad 1\times a+2\times0.3+3\times b+4\times0.2+5\times0.15=3$

بالتبسيط $\quad a+3b=0.85 \;.........(1)$

مجموع الاحتمالات هو 1 $\quad a+0.3+b+0.2+0.15=1$

بالتبسيط $\quad a+b=0.35 \;.........(2)$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) $\quad 2b=0.50$

بالقسمة على 2 $\quad b=0.25$

بالتعويض في المعادلة (2) $\quad a+0.25=0.35$

بطرح 0.25 من طرفي المعادلة $\quad a=0.10$

أيْ إنَّ:

$$P(x=1)=0.10,\ P(x=3)=0.25$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	b	0.2	0.3

وكان التوقُّع $E(x) = 2.5$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x = 2)$، و $P(x = 1)$.

$P(X = 1) = 0.1 \quad , \quad P(X = 2) = 0.3$

التباين (Variance) للمتغير العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قِيَم المتغير عن وسطها الحسابي $E(x)$، ويُمكِن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \left(\sum x^2 . P(x)\right) - (E(x))^2$$

مفهوم أساسي — التباين

بالكلمات: التباين للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب مربعات قِيَم المتغير X في احتمال كل قيمة مطروحًا منه مربع التوقُّع للمتغير X.

بالرموز:

$$\sigma^2 = \left(\sum x^2 . P(x)\right) - (E(x))^2$$

أتذكَّر

الانحراف المعياري σ هو الجذر التربيعي للتباين.

مثال 3

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	0.35	0.3	0.15

81

مثال 3

- أُناقِش الطلبة في مفهوم التباين، وكيف يُمكِن إيجاده لبيانات منظمة في جدول تكراري، ثم أُناقِشهم في الحالة الخاصة لتوزيع احتمالي بوصفه جدول تكراري نسبي. فاستنادًا إلى صيغة التباين لجدول تكراري: $\sigma^2 = \dfrac{\sum x^2 \cdot f - (\sum f)(\mu)^2}{\sum f}$، وافتراض أنَّ f هو التكرار النسبي، وأنَّه الاحتمال، وتعويض كلٍّ من $\sum f = 1$، و $\mu = E(X)$؛ فإنَّ صيغة التباين لأيِّ توزيع احتمالي تصبح:

$$\sigma^2 = \sum x^2 \cdot P(x) - (E(X))^2$$

- أُناقِش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، الذي يُبيِّن طريقة إيجاد التباين لمُتغيِّر عشوائي، بإيجاد التوقُّع، ثم ضرب مربع كل قيمة في احتمالها، وإيجاد مجموع نواتج الضرب، ثم التعويض في صيغة التباين.

! أخطاء شائعة:

قد يُخطِئ بعض الطلبة عند إيجاد التباين لمُتغيِّر عشوائي بعدم طرح مربع التوقُّع (الوسط الحسابي) من مجموع نواتج ضرب مربعات قِيَم X في احتمالاتها، فيعتقدون أنَّ التباين $\sigma^2 = E(X^2)$؛ لذا أُذكِّرهم بالصيغة الصحيحة لإيجاد التباين: $\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$.

مثال إضافي:

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y:

y	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	0.2	0.15	0.2	0.35	0.1

1. أجد التوقُّع $E(Y)$. 3

2. أجد التباين σ^2. 1.7

4 التدريب

أتدرّب وأحل المسائل

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (أتدرَّب وأحل المسـائل)، ثم أطلب إليهم حل المسـائل (4–1) ضمن مجموعات ثنائية داخـل الغرفة الصفية؛ فهذه المسـائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشـرًا بأمثلة الدرس، وهي تُسـتعمَل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسـها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيَّة مسألة، فإنَّني أختار أحـد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن/ تمكَّنت من حل المسـألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ اسـتراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيِّ تسـاؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المسـتوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (**أتدرَّب وأحل المسـائل**)، فإنَّني أضع كُلًّا منهـم مع طالب آخـر/ طالبة أخرى من ذوي المسـتوى المتوسـط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

المفاهيم العابرة للمواد:

عند حل الأسـئلة (5–3)، أُثير حوارًا عن وجوب مشاركة الشباب والشـابات في مجالس الطلبة بالجامعات؛ تأكيدًا لمبدأ المسـاواة، وتمكين الفتيات سياسيًّا، وتنمية الحِسِّ بالمسؤولية لدى الجميع، والمشاركة في رسم السياسات التي تهمُّ مسـتقبل الطلبة، واتخاذ القرارات التي تصبُّ في المصلحـة العامة للمجتمع الطلابـي خاصة، وللمجتمع والوطن بوجه عام. وإثراءً لهذا الحوار، أطرح على الطلبة عددًا من الأسئلة، مثل:

- ما فائدة مجالس الطلبة في المدرسة أو الجامعة؟
- ما آليَّة اختيار الأعضاء؟
- مَنْ يريـد أنْ يكون عضوًا في مجلـس الطلبة؟ لماذا؟
- ماذا أقترح لتحسين أداء المجلس؟

---

1 أجد التوقُّع $E(x)$.

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X: $E(x)=\sum x.P(x)$

بكتابة مجاميع حاصل الضرب: $=1\times0.2+2\times0.35+3\times0.3+4\times0.15$

بالتبسيط: $=2.4$

2 أجد التباين σ^2.

صيغة التباين للمتغير العشوائي X: $\sigma^2=(\sum x^2.P(x))-(E(x))^2$

بالتعويض: $=1^2\times0.2+2^2\times0.35+3^2\times0.3+4^2\times0.15-(2.4)^2$

بالتبسيط: $=0.94$

أتحقّق من فهمي

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	0.4	0.35	0.15

فأجد التوقُّع $E(x)$، والتباين σ^2. $E(X)=1.55;\ \sigma^2=3.15-(1.55)^2=0.7475$

أتدرّب وأحلّ المسائل

1 يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 50 طالبًا من إحدى المدارس لمعرفة عدد ساعات الدراسة في يوم الإجازة:

عدد ساعات الدراسة (x)	1	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	4	12	20	8	6

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الساعات، أجد $E(x)$.

$E(X)=1\times0.08+2\times0.24+3\times0.4+4\times0.16+5\times0.12=3$

82

2 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	0.13	0.27	a	b	0.22	a

وكان التوقُّع $E(x) = 0.39$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x = 1)$، و $P(x = 0)$. أنظر ملحق الإجابات.

يتكوَّن مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 8 طلاب و12 طالبة، وقد اختاروا عشوائيًّا لجنة تضم اثنين منهم للاجتماع مع مُمثِّلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

3 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات.

4 أجد التوقُّع لعدد الطالبات في اللجنة المختارة. أنظر ملحق الإجابات.

5 أجد التباين للتوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات.

6 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

7 تحدٍّ: ما قيمة σ^2 للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول الآتي إذا كان $E(x) = 5.95$؟

x	2	5	a	8
$P(x)$	0.1	b	0.2	0.35

أنظر ملحق الإجابات.

8 تحدٍّ: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, kx), (2, \frac{1}{8}), (3, \frac{1}{8}), (4, kx), (5, \frac{1}{8}), (6, \frac{1}{8})\}$$

فما قيمة التوقُّع للمتغير X؟ أنظر ملحق الإجابات.

6 الختام

أطلب إلى كل طالب أنْ يكتب على ورقة وصفًا لتجربة عشوائية، ومُتغيِّرًا عشوائيًّا مُعرَّفًا عليها، ويحسب التوقُّع والتباين لذلك المُتغيِّر العشوائي، ثم أجمع الأوراق، وأرصد الأخطاء (إنْ وُجِدت)، وأعمل على معالجتها.

مهارات التفكير العليا

- أُوجِّه الطلبة إلى بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 7 والمسألة 8.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 5, 6, 8 كتاب التمارين: (1–3)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (5–7) كتاب التمارين: 3, 4
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (6–8) كتاب التمارين: (3–5)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراءً لهم:

1 أُلقي حجرا نرد منتظمان ومتمايزان معًا مَرَّة واحدة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على الفرق المُطلَق بين الرقمين الظاهرين، فأجد التوقُّع $E(X)$، والتباين σ^2.

$$E(X) = \frac{35}{18} \approx 1.94, \sigma^2 = \frac{665}{324} \approx 2.05$$

2 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X. أجد التباين σ^2.

X	-2	1	5	7
$P(X = x)$	a	a^2	$2a^2$	a

$$a = \frac{1}{3}; E(X) = \frac{26}{9}; \sigma^2 = \frac{1214}{81} \approx 14.99$$

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (8–1) فرديًّا، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُناقِشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.
- أُوزِّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (12–9)، وأتجوَّل بينهم مُساعِدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأُقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أُحدِّد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 رُتِّبت الأحرف: ر، ط، م عشوائيًّا في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة (مطر) هو:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{2}$

2 رُتِّبت الأحرف: R, E, D, E عشوائيًّا في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة ($DEER$) هو:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{24}$

3 احتمال اختيار 2 من الرجال و3 من النساء عشوائيًّا من بين 5 موظفين و5 موظفات في إحدى الشركات لحضور مؤتمر علمي هو:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$
c) $\frac{50}{63}$ d) $\frac{25}{63}$

4 سحب علي 4 كرات معًا عشوائيًّا من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات زرقاء، و3 كرات صفراء، و3 كرات خضراء، وكانت جميع الكرات التي في الصندوق مُتماثِلة. احتمال أنْ تكون 2 من الكرات المسحوبة من لون واحد، وبقية الكرات من لونين آخرين هو:

a) $\frac{36}{55}$ b) $\frac{9}{55}$
c) $\frac{4}{55}$ d) $\frac{8}{55}$

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	5
$P(x)$	$2k$	k	k	k

5 قيمة k هي:

a) 0.1 b) 0.2
c) 0.3 d) 0.4

6 قيمة $E(x)$ هي:

a) 1.2 b) 1.4
c) 2.4 d) 1

7 قيمة σ^2 هي:

a) 2.24 b) 2.4
c) 8 d) 5.76

8 قيمة $P(x < 3)$ هي:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$

اختبار نهاية الوحدة

9 يُبيِّـن الجـدول الآتـي نتائج مسـح شـمل 60 يومًا متتاليًا، وقد دَوَّن قيس في كلٍّ منها عدد رسـائل البريد الإلكتروني التي وصلته:

عدد الرسائل (x)	0	1	2	3	4
عدد الأيام (f)	8	12	10	18	12

بافتراض أنَّ المتغير العشـوائي X يُمثِّل عدد الرسائل، أجد $E(x)$.

$E(X) = 0\times \frac{8}{60} + 1\times \frac{12}{60} + 2\times \frac{10}{60} + 3\times \frac{18}{60} + 4\times \frac{12}{60}$

$= \frac{134}{60} \approx 2.23$

صندوق فيه 3 كرات زرقاء، و6 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة. سُحِبت من الصندوق 3 كرات على التوالي من دون إرجاع، ودلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة:

10 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

أنظر ملحق الإجابات.

11 أجد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة على الأقل.

$\frac{16}{21}$

12 يُبيِّـن الجـدول التالـي التوزيع الاحتمالـي للمتغير العشـوائي X، حيث $E(X) = \frac{5}{12}$. أجد قيمة كلٍّ من: a، و b.

x	-1	0	1	2
$P(x)$	a	$4b$	$2b$	a

أنظر ملحق الإجابات.

تدريب على الاختبارات الدولية

يحتوي كيس على 8 كرات زجاجية حمراء، و4 كرات زجاجية خضـراء، جميعهـا مُتماثِلة. إذا سُـحِب من الكيس 6 كرات عشوائيًّا دفعة واحدة فما احتمال:

13 أنْ تكون 4 من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

$\frac{5}{11}$

14 أنْ تكون 4 على الأقل من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

$\frac{8}{11}$

X متغير عشوائي، وله التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-2	3
$P(x)$	a	$1-a$

15 أُثبِت أنَّ $\sigma^2 = 25\, a(1-a)$.

أنظر ملحق الإجابات.

16 إذا كان $E(x) = 2$، فما قيمة σ؟

$E(X) = 2 \Rightarrow -2 \times a + 3 \times (1-a) = 2$

$-5a = -1 \Rightarrow a = 0.2$

$\sigma^2 = 25 \times 0.2 \times 0.8 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$

85

تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسـئلة الواردة في بند **(تدريب علـى الاختبارات الدوليـة)** فرديًّا، ثم أُناقِشـهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبيِّنًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.
- أُحفِّز الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جِدِّيـة، وأحـرص على تضميـن اختباراتي المدرسـية نماذج مُماثِلة لهذه الأسئلة.

كتاب التمارين

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

- **حساب مضروب العدد** (الدرس 1)

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

1) $\frac{5!}{3!}$ 20

2) $\frac{9!}{3!\times 6!}$ 84

مثال: أجد قيمة $\frac{12!}{4!\times 8!}$ في أبسط صورة.

تعريف مضروب العدد	$\frac{12!}{4!\times 8!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8!}{4\times 3\times 2\times 8!}$
بالتبسيط	$= 495$

3) أحلّ المعادلة الآتية: $(n+1)! = 24$ $n = 3$

مثال: أحلّ المعادلة الآتية: $(n-1)! - 20 = 700$

بإضافة 20 إلى طرفي المعادلة	$(n-1)! = 720$
بكتابة 720 في صورة مضروب العدد	$(n-1)! = 6!$
بحَلِّ المعادلة	$n-1 = 6$
بإضافة 1 إلى طرفي المعادلة	$n = 7$

- **استعمال المبدأ الأساسي للعَدّ، والتباديل، والتوافيق** (الدرس 1)

4) بكم طريقة يُمكِن تكوين أعداد تحوي كلٌّ منها 3 منازل مختلفة باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5؟ 60

مثال: بكم طريقة يُمكِن لأحمد أنْ يظهر بزيّ مختلف يتكوَّن من بنطال وقميص وربطة عنق إذا كان لديه في الخزانة ملابس ألوانها كما في الجدول المجاور؟

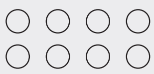
الزي	بنطال	قميص	ربطة عنق
الألوان المتوافرة	أسود، أزرق، رمادي.	أبيض، أزرق، أسود، أخضر، رمادي.	حمراء، سوداء.

أفترض أنَّ عدد طرائق اختيار أحمد الزي هو m، وأنَّ عدد طرائق اختياره البنطال هو n_1، وأنَّ عدد طرائق اختياره القميص هو n_2، وأنَّ عدد طرائق اختياره ربطة العنق هو n_3:

مبدأ العَدِّ الأساسي	$m = n_1 \times n_2 \times n_3$
بالتعويض، وإيجاد ناتج الضرب	$= 3 \times 5 \times 2 = 30$

5) بكم طريقة يُمكِن اختيار رئيس ونائب للرئيس، ثم اختيار عضوين من بين 10 مُعلِّمين للجنة مدرسية؟ 2520

مثال: بكم طريقة يمكن لـ 8 صديقات، بينهن سلوى وزبيدة، الجلوس على 8 مقاعد مرتّبة في صفين، كما في الشكل المجاور، إذا قرّرت سلوى وزبيدة الجلوس على المقاعد التي عند طرفي الصفين؟



أفترض أنَّ العدد الكلي لطرائق جلوس الصديقات هو m:

عدد طرائق جلوس سلوى	$n_1 = 4$
عدد طرائق جلوس زبيدة	$n_2 = 3$
عدد طرائق جلوس البقية (6 صديقات ترتيبهن مهم)	$n_3 = {}_6P_6 = 6! = 720$
مبدأ العَدِّ الأساسي	$m = n_1 \times n_2 \times n_3$
بالتعويض، وإيجاد ناتج الضرب	$= 4 \times 3 \times 720 = 8640$

6) بكم طريقة يمكن اختيار كتابي تاريخ وكتابي علوم من رفٍّ عليه 6 كتب تاريخ مختلفة و6 كتب علوم مختلفة؟ 225

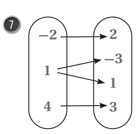
مثال: بكم طريقة يُمكِن تكوين لجنة فيها 3 من الذكور و2 من الإناث من بين 7 موظفين و7 موظفات؟

أفترض أنَّ العدد الكلي لطرائق تكوين اللجنة هو m:

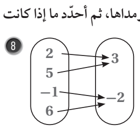
عدد طرائق اختيار 3 من 7 ذكور	$n_1 = {}_7C_3 = 35$
عدد طرائق اختيار 2 من 7 إناث	$n_2 = {}_7C_2 = 21$
مبدأ العَدِّ الأساسي	$m = n_1 \times n_2$
بالتعويض، وإيجاد ناتج الضرب	$= 35 \times 21 = 735$

- **العلاقة والاقتران** (الدرس 2)

أحدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، ثم أحدّد ما إذا كانت اقترانًا أم لا:

7) 

المجال: $\{-2, 1, 4\}$
المدى: $\{-3, 1, 2, 3\}$
ليس اقترانًا.

8) 

المجال: $\{-1, 2, 5, 6\}$
المدى: $\{-2, 3\}$
اقتران.

9)

x	4	2	−3	4	−4
y	0	−1	0	−1	0

المجال: $\{-4, -3, 2, 4\}$، المدى: $\{-1, 0\}$، ليس اقترانًا.

10)

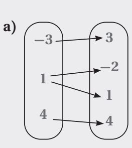
x	−2	−1	0	1	2
y	−3	−3	−3	−3	−3

المجال: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$، المدى: $\{-3\}$، اقتران.

11) $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 4), (1, -9)\}$
المجال: $\{-2, -1, 0, 1\}$، المدى: $\{-9, 2, 4, 5\}$، اقتران.

12) $\{(4, 2), (1, 1), (0, 0), (1, -1), (4, -2)\}$
المجال: $\{0, 1, 4\}$، المدى: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$، ليس اقترانًا.

مثال: أحدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، ثمّ أحدّد ما إذا كانت تمثل اقترانًا أم لا:

a) 

المجال: $\{-3, 1, 4\}$ **المدى:** $\{3, -2, 1, 4\}$

ألاحظ ارتباط العنصر 1 في المجال بالعنصرين −2 و1 في المدى.

إذن: لا تمثل هذه العلاقة اقترانًا.

b)

x	5	3	2	0	−4	−6
y	1	3	1	3	−2	2

المجال: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ **المدى:** $\{1, 3, -2, 2\}$

ألاحظ ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى، إذن، تمثل هذه العلاقة اقترانًا.

c) $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجال: $\{0, 2, 3, 5\}$ **المدى:** $\{1, 4, 7\}$

ألاحظ ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى، إذن، تمثل هذه العلاقة اقترانًا.

- **تحديد عناصر الفضاء العيني في تجربة عشوائية لحساب احتمالات الحوادث** (الدرس 3)

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين مرةً واحدةً عشوائيًا وإيجاد ناتج جمع الرقمين الظاهرين، أجد احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين:

13) يساوي 4 $\frac{1}{12}$

14) يساوي 7 $\frac{1}{6}$

15) أقل من 4 $\frac{1}{12}$

16) عددًا زوجيًا. $\frac{1}{2}$

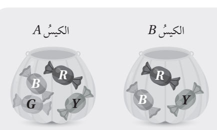
17) من مضاعفات العدد 3 $\frac{1}{3}$

18) مربعًا كاملًا. $\frac{7}{36}$

19) أقل من 8 $\frac{7}{12}$

20) أقل من أو يساوي 8 $\frac{13}{18}$

مثال: سحبت غدير قطعة حلوى عشوائيًا من كل كيس من الكيسين المجاورين، أستعمل جدولًا لأجد:



a) احتمال سحب قطعتَي حلوى من اللّون نفسه.

أمثل الفضاء العينيّ للتجربة باستعمال جدول. ألاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني 12

		الكيسُ B		
		R	B	Y
الكيسُ A	R	R, R	R, B	R, Y
	Y	Y, R	Y, B	Y, Y
	B	B, R	B, B	B, Y
	G	G, R	G, B	G, Y

أفترض أنّ الحادث A هو سحب قطعتَي حلوى لهما اللون نفسه، إذن عدد عناصر هذا الحادث 3؛ لذا فإنّ احتمال الحادث A يساوي:

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

b) احتمال سحب قطعتَي حلوى ليست أيّ منهما زرقاء أو خضراء.

		الكيسُ B		
		R	B	Y
الكيسُ A	R	R, R	R, B	R, Y
	Y	Y, R	Y, B	Y, Y
	B	B, R	B, B	B, Y
	G	G, R	G, B	G, Y

أفترض أنّ الحادث يمثل سحب قطعتَي حلوى ليست أيّ منهما زرقاء أو خضراء.

ألاحظ من الجدول أنّه توجد 4 نواتج لا تحتوي قطعة حلوى زرقاء أو خضراء؛ لذا فإنّ احتمال الحادث B يساوي:

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

كتاب التمارين

• حساب احتمالات حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة في تجربة عشوائية (الدرس 3)

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى حمراء (R)، و8 قطع حلوى خضراء (G)، جميعها متماثلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائيًّا وأكلها، ثم اختار قطعة أخرى عشوائيًّا ليأكلها.

أجد احتمال كل من الحادثين الآتيين باستعمال الشجرة الاحتمالية:

21. اختيار الطفل قطعتَي حلوى متماثلتَي اللون. $\frac{43}{91}$
22. اختيار الطفل قطعتَي حلوى مختلفتَي اللون. $\frac{48}{91}$

أقلام حبر: في علبة قلما حبر أحمر، وثلاثة أقلام حبر أزرق، جميعها متماثلة. اختار سالم منها قلمين عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع. أجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

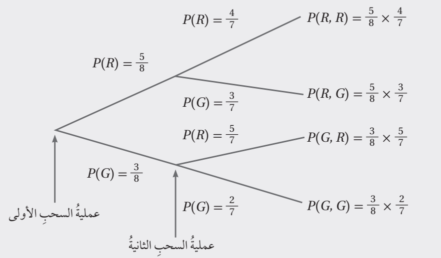
23. اختيار قلمي حبر أحمر. $\frac{1}{10}$
24. اختيار قلمي حبر أزرق. $\frac{3}{10}$
25. اختيار قلم حبر من كل لون. $\frac{3}{5}$

أرصاد جوية: أفادت مذيعة النشرة الجوية أن احتمال تساقط الثلوج يوم الإثنين هو 25%، وأنه يرتفع إلى 90% يوم الثلاثاء، أستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد احتمال:

26. تساقط الثلوج يوم الثلاثاء، وعدم تساقطها يوم الإثنين. $\frac{27}{40}$
27. عدم تساقط الثلوج في كلا اليومين. $\frac{3}{40}$

مثال: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، جميعها متماثلة. سُحبت كرة من الكيس عشوائيًّا، ثمّ كُتِب لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثم سُحِبت كرة أخرى عشوائيًّا، ثمّ كُتِب لونها. أجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

ألاحظ من التمثيل بالشجرة الاحتمالية الآتي كيف تتأثر عملية السحب الثانية بنتيجة عملية السحب الأولى عند عدم إرجاع الكرة المسحوبة:



a) سحب كرتين خضراوين.

بعد عملية السحب الأولى يقل عدد الكرات في الكيس بمقدار كرة خضراء

$$P(G \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

b) سحب كرة خضراء في المرّة الأولى وكرة حمراء في المرة الثانية.

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالة واحدة فقط من الحالات الأربع التي تظهر في الشجرة الاحتمالية

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

c) سحب كرتين، إحداهما خضراء، والأخرى حمراء.

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالتين، هما: الكرة الأولى حمراء، والثانية خضراء، أو الكرة الأولى خضراء، والثانية حمراء

$$P(R \cap G) + P(G \cap R) = \frac{5}{8}\times\frac{3}{7} + \frac{3}{8}\times\frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

الدرس 1

الاحتمال بالتباديل والتوافيق

Probability with Permutations and Combinations

1. رُتِّبت 4 بطاقات مُتماثِلة عشوائيًّا في صف واحد، وحملت كلٌّ منها أحد الأرقام من 1 إلى 4. ما احتمال أنْ يظهر الرقمان 2 و4 متجاورين؟ $\frac{2(3!)}{4!} = \frac{1}{2}$
2. يتكوَّن مجلس الطلبة في إحدى المدارس من 5 أعضاء، بينهم خليل ومجدي. ما احتمال اختيار خليل رئيسًا للمجلس، واختيار مجدي مُقرِّرًا له إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟ $\frac{1}{20}$
3. صندوق فيه كرات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل أحد الأرقام من 1 إلى 9، إذا اختيرت عشوائيًّا 3 كرات دفعة واحدة، فما احتمال أنْ تحمل الكرات المختارة أعدادًا فرديةً؟ $\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3} = \frac{5}{42}$

يعمل في شركة 6 موظفين و6 موظفات، ويريد مدير الشركة تكوين فريق يضم 4 منهم عشوائيًّا؛ لحضور ندوة عن تسويق المُنتَجات. أجد احتمال اختيار المدير:

4. فريقًا يضم 2 من الموظفين و2 من الموظفات. $\frac{{}_6C_2 \times {}_6C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{5}{11}$
5. الموظفة مريم رئيسًا للفريق، والموظفة لبنى نائبًا للرئيس، وبقية الفريق من الذكور. $\frac{1 \times 1 \times {}_6C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{1}{33}$
6. فريقًا ليس فيه إناث. $\frac{{}_6C_4}{{}_{12}C_4} = \frac{1}{33}$
7. فريقًا يضم 3 موظفات على الأقل. $\frac{{}_6C_3 \times {}_6C_1 + {}_6C_4 \times {}_6C_0}{{}_{12}C_4} = \frac{3}{11}$

في كيسٍ 10 حبّات حلوى مُغلَّفة بورق أزرق، و10 أُخرى مُغلَّفة بورق أحمر. اختارت هدى 5 حبّات عشوائيًّا من الكيس معًا، أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

8. اختيار هدى حبَّتين مُغلَّفتين بورق أزرق، و 3 حبّات مُغلَّفة بورق أحمر. $\frac{{}_{10}C_2 \times {}_{10}C_3}{{}_{20}C_5} = \frac{225}{646}$
9. عدم اختيار هدى أيَّ حبَّة حلوى مُغلَّفة بورق أحمر. $\frac{{}_{10}C_5}{{}_{20}C_5} = \frac{21}{1292}$
10. اختيار هدى 4 حبّات على الأقل مُغلَّفة بورق أحمر. $\frac{{}_{10}C_4 \times {}_{10}C_1 + {}_{10}C_5}{{}_{20}C_5} = \frac{49}{323}$

كتاب التمارين

الدرس 2
المتغير العشوائي
Random Variable

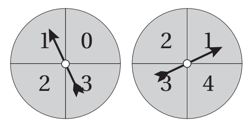
1. في تجربة لاختيار عائلة لديها طفلان عشوائيًّا، وتسجيلهما بحسب الجنس وتسلسل الولادة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الذكور، فأجد مجموعة قِيَم X. $\Omega = \{(B, B), (B, G), (G, B), (G,G)\}; X = \{0, 1, 2\}$
(**إرشاد**: أستعمل حرف B للذكور، وحرف G للإناث).

2. فـي تجربة إلقاء 4 قطع نقد معدنية متمايزة عشـوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشـوائي X على عدد مرّات ظهـور الكتابة، فأجد مجموعة قِيَم X. (**إرشاد**: أستعمل حرف H للصورة، وحرف T للكتابة).
$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

3. في تجربة سـحب بطاقتين عشـوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة برقم من 1 إلى 4، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.
$A = \{(1, 3), (3, 1)\}$

4. في تجربة سحب بطاقتين عشـوائيًّا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة برقم من 1 إلى 4، إذا دلَّ المتغير العشـوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسـحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.
$A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$

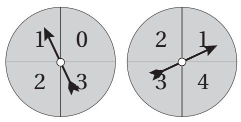
إذا دُوِّر مؤشّرا القرصين عشوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّـر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قِيَم المتغير العشوائي X إذا دلَّ على:



5. مجموع العددين. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
6. القيمة المطلقة للفرق بين العددين. $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
7. ناتج ضرب العددين. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$

الدرس 3
احتمال المتغير العشوائي
Probability of a Random Variable

إذا دُوِّر مؤشّرا القرصين عشـوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّـر عند أحد الأعداد، ودلَّ المتغير العشـوائي X على مجموع العددين، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



1. التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. أنظر ملحق الإجابات.
2. التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات.

إذا دُوِّر المؤشّران السابقان عشوائيًّا، ودلَّ المتغير العشوائي X على حاصل ضرب العددين، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

3. التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. أنظر ملحق الإجابات.
4. التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول المجاور:

x	1	2	3	4
$P(x)$	a	0.2	a	0.1

5. أجد قيمة a. $a = 0.35$
6. أجد $P(x = 3)$. $P(X = 3) = a = 0.35$
7. أجد $P(2 \leq x < 4)$. $P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.55$
8. أجد $P(1 \leq x < 2)$. $P(1 \leq X < 2) = P(X = 1) = 0.35$

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(0, k), (1, 2k), (2, 2k)\}$$

9. أجد قيمة k. $k = 0.2$
10. أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات.
11. أجد $P(x \leq 1)$. $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.6$
12. في تجربة سـحب كرتين عشـوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 كرات حمراء، و5 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشـوائي X على عدد الكرات الحمراء في السـحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X. أنظر ملحق الإجابات.

الدرس 4
توقُّع المتغير العشوائي
Expected Value of a Random Variable

يُبيِّن الجدول الآتي جزءًا من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؛ لأنَّ فيه قيمة مفقودة:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.3	?	0.4	0.05

1. أجد القيمة المفقودة في الجدول. 0.25
2. أجد التوقُّع $E(X)$. $E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.25 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.05 = 1.2$
3. يُبيِّن الجدول التالي نتائج مسح شـمل 100 طالب من طلبة إحدى الجامعات لمعرفة عدد المواد التي سجَّلها الطلبة في فصل دراسي مُعيَّن. بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد المواد المُسجَّلة، أجد التوقُّع $E(X)$.

عدد المواد (x)	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	36	44	15	5

$E(X) = 2 \times 0.36 + 3 \times 0.44 + 4 \times 0.15 + 5 \times 0.05 = 2.89$

4. إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي X كما في الجدول التالي، وكان التوقُّع $E(X) = 2.2$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x = 1), P(x = 3)$.

x	1	2	3	4
$P(x)$	a	0.25	b	0.25

$P(X = 1) = 0.4$
$P(X = 3) = 0.1$

5. إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول التالي، فأجد التوقُّع $E(X)$، والتباين σ^2.

x	3	4	5	6
$P(x)$	0.15	0.45	0.25	0.15

$E(X) = 3 \times 0.15 + 4 \times 0.45 + 5 \times 0.25 + 6 \times 0.15 = 4.4$
$\sigma^2 = 9 \times 0.15 + 16 \times 0.45 + 25 \times 0.25 + 36 \times 0.15 - (4.4)^2 = 0.84$

الدرس 1 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

5) عدد عناصر فضاء العيِّنة يساوي عدد طرائق اختيار 4 أعضاء مضروبًا في عدد طرائق اختيار الرئيس من بينهم في عدد طرائق اختيار أمين السر في عدد طرائق اختيار أميني الصندوق، أو عدد طرائق اختيار الرئيس وأمين السر من المجموعة كاملة مضروبًا في عدد طرائق اختيار أميني الصندوق من البقية.

$$n(\Omega) = {}_{24}C_4 \times 4 \times 3 \times 1 = 127512$$

$$\text{OR: } n(\Omega) = {}_{24}P_2 \times {}_{22}C_2 = 127512$$

$$n(A) = {}_{14}C_1 \times {}_{13}C_2 \times {}_{10}C_1 = 10920$$

$$P(A) = \frac{10920}{127512} \approx 0.0856$$

10) عدد طرائق سحب 3 كرات يساوي: 6^3

عدد طرائق سحب كرة حمراء وكرتين خضراوين يساوي: $(2 \times 2 \times 4)$ مضروبًا في عدد طرائق ترتيب الكرات الثلاث، وهو: $\frac{3!}{2!} = 3$ (الأخضر مُكرَّر مرَّتين).

$$n(\Omega) = 6^3 = 216$$

$$n(A) = 3 \times 16 = 48$$

$$P(A) = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

12) عدد طرائق توزيع 14 قميصًا على 14 لاعبًا هو ${}_{14}P_{14}$ (الترتيب مُهِمٌّ).

عدد عناصر الحادث (حصول صالح على الرقم 9، وحصول بلال على الرقم 10) يساوي عدد طرائق حصول صالح على الرقم 9 مضروبًا في عدد طرائق حصول بلال على الرقم 10 مضروبًا في عدد طرائق توزيع ألـ 12 قميصًا المُتبقِّية على بقية اللاعبين.

$$n(A) = 1 \times 1 \times {}_{12}P_{12} = {}_{12}P_{12}$$

إذن، احتمال هذا الحادث هو:

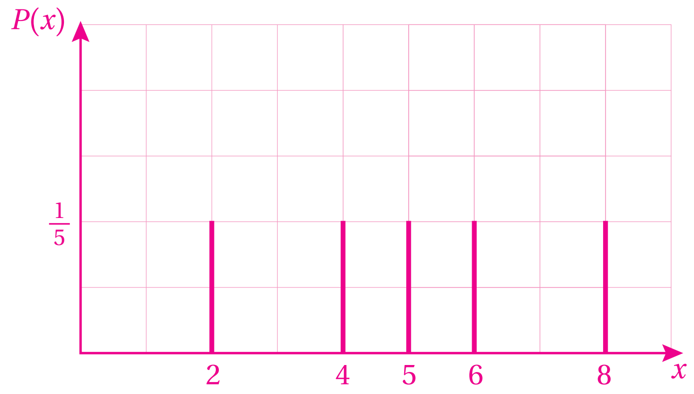
$$P(A) = \frac{{}_{12}P_{12}}{{}_{14}P_{14}} = \frac{12!}{14!} = \frac{1}{182}$$

الدرس 3 – إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 1):

a)

x	2	4	5	8	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

b)



الدرس 3 – إجابة الأسئلة في بند (أتحقَّق من فهمي 4):

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

حمراء: R، خضراء: G

$$P(X=0) = P(GGG) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = P(\{RGG, GRG, GGR\}) = 3\left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = P(\{RRG, RGR, GRR\}) = 3\left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$$

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

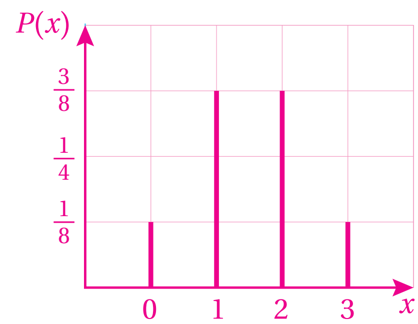
x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

الدرس 3 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

1) جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2)



6) جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.4	0.1	0.4	0.1

8) $X=\{0, 1, 2\}$

الطريقة الأولى: حساب الاحتمالات باستعمال التوافيق:

$P(X=0)=P(2G)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

$P(X=1)=P(1G,1R)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=P(2R)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

الطريقة الثانية: استعمال احتمال وقوع حادثين معًا وقانون ضرب الاحتمالات:

$P(X=0)=P(G\cap G)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

$P(X=1)=P(G\cap R)+P(R\cap G)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=P(R\cap R)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

إذن، جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X هو:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

الدرس 4 – إجابة الأسئلة في بند (أتدرَّب وأحل المسائل):

2) $\sum P(X=x)=1 \Rightarrow 0.13+0.27+a+b+0.22+a=1$

$2a+b=0.38 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$E(X)=0.39 \Rightarrow -2\times 0.13-1\times 0.27+0\times a+b+2$

$\times 0.22+3\times a=0.39$

$3a+b=0.48 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2)، أجد أنَّ: $a=0.1$

وبالتعويض في المعادلة (1)، أجد أنَّ: $b=0.18$

إذن، $P(X=0)=0.1$، و $P(X=1)=0.18$

3) $X=\{0, 1, 2\}$

$P(X=0)=\frac{{}_8C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{14}{95}$

$P(X=1)=\frac{{}_8C_1\times{}_{12}C_1}{{}_{20}C_2}=\frac{48}{95}$

$P(X=2)=\frac{{}_{12}C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{33}{95}$

إذن، التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{14}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{33}{95}$

4) $E(X)=0\times\frac{14}{95}+1\times\frac{48}{95}+2\times\frac{33}{95}=\frac{114}{95}=1.2$

5) $\sigma^2=0\times\frac{14}{95}+1\times\frac{48}{95}+4\times\frac{33}{95}-(1.2)^2\approx 0.45$

6) يُمكِنها أنْ تُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي الآتي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

ثم تحسب التوقُّع الذي يُمثِّل الوسط الحسابي، وتحسب التباين الذي هو مربع الانحراف المعياري كما يأتي:

$E(X)=1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{2}{12}+3\times\frac{3}{12}+4\times\frac{3}{12}+5\times\frac{2}{12}+6\times\frac{1}{12}$

$=\frac{42}{12}=3.5$

$\sigma^2=1\times\frac{1}{12}+4\times\frac{2}{12}+9\times\frac{3}{12}+16\times\frac{3}{12}+25\times\frac{2}{12}+36\times\frac{1}{12}-(3.5)^2$

≈ 1.92

$\sigma\approx\sqrt{1.92}\approx 1.39$

7) $\sum P(X{=}x) = 1 \Rightarrow 0.1{+}b{+}0.2{+}0.35{=}1 \Rightarrow b{=}0.35$

$E(X){=}5.95 \Rightarrow 2{\times}0.1{+}5{\times}0.35 + a{\times}0.2{+}8{\times}0.35 = 5.95$

$a = 6$

$\sigma^2 = 4{\times}0.1{+}25{\times}0.35{+}36{\times}0.2{+}64{\times}0.35{-}(5.95)^2 = 3.3475$

8) $\sum P(X{=}x) = 1 \Rightarrow 1{\times}\, k + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 4\, {\times} k {+} \frac{1}{8} + \frac{1}{8} {=}1$

$5k = 0.5 \Rightarrow k = 0.1$

$E(X) = 1{\times}0.1{+}2{\times}\frac{1}{8}{+}3{\times}\frac{1}{8}{+}4{\times}0.4{+}5{\times}\frac{1}{8}{+}6{\times}\frac{1}{8} = 3.7$

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

10)

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

12) $2a + 6b = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$

$E(X) = \frac{5}{12} \Rightarrow -1{\times}a + 0 \times 4b + 1{\times}2b + 2{\times}a = \frac{5}{12}$

$a + 2b = \frac{5}{12} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

بضرب المعادلة (2) في 2، وطرحها من المعادلة (1)، أجد أنَّ: $2b = \frac{2}{12}$،

فينتج: $b = \frac{1}{12}$

وبالتعويض في المعادلة (2)، أجد أنَّ: $a = \frac{1}{4}$

15) $E(X) = -2{\times}\, a + 3 \times (1{-}a) = 3{-}5a$

$\sigma^2 = 4{\times}a + 9(1{-}a) - (3{-}5a)^2$

$= 9 - 5a{-}(9 - 30a + 25a^2)$

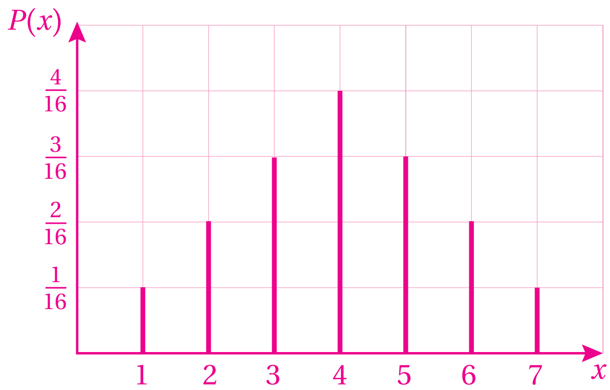
$= 25a - 25a^2 = 25a(1 - a)$

كتاب التمارين – إجابة أسئلة الدرس (3):

1)

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

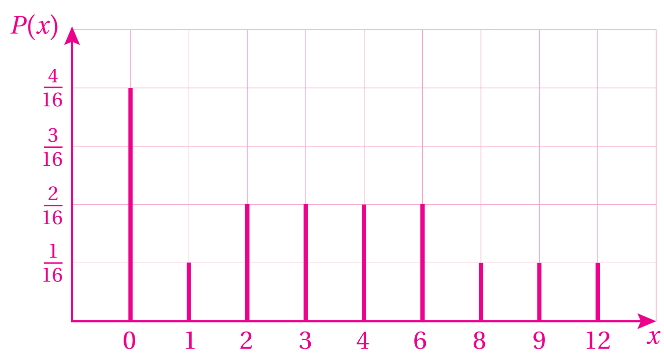
2)



3)

x	0	1	2	3	4	6	8	9	12
$P(X=x)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

4)



10)

x	0	1	2
$P(X=x)$	0.2	0.4	0.4

12) $X = \{0, 1, 2\}$

$P(X=0) = P(2G) = \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(X=1) = P(1G,1R) = \frac{{}_5C_1 \times {}_4C_1}{{}_9C_2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

$P(X=2) = P(2R) = \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

إذن، التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$